

文章编号: 1001-4888(2016)02-0165-10

基于贝叶斯方法的模态参数识别的不确定度分析^{*}

王君, 邓华夏, 张进, 于连栋

(合肥工业大学 仪器科学与光电工程学院, 安徽 230009)

摘要: 振动模态分析和模态参数识别是动态测试的一个重要研究方向。模态参数在模型的修正、响应的预测、系统的健康检测及控制等方面有着重要的作用。但动态测试的不确定度分析, 尤其是模态参数的不确定度的研究还十分缺乏。本文主要基于贝叶斯方法, 通过傅立叶变换 (FFT) 建立时域数据和频域数据之间的对应关系。根据共振频带内的多个模态的响应数据得到相对应的模态参数, 优化得到模态参数的最佳估计值, 评定模态参数识别的不确定度。在固支梁的模态实验中, 加速度传感器采集环境激励中的振动数据, 运用贝叶斯法进行处理得到模态参数的最佳估计值。在此基础上, 通过模态参数的最佳估计值, 以及仪器的检定报告数据, 结合合成不确定度分析方法, 系统分析了模态参数识别的不确定度。

关键词: 贝叶斯方法; 模态参数; 不确定度; 动态测试

中图分类号: TH701 **文献标识码:** A **DOI:** 10.7520/1001-4888-15-172

0 引言

不确定度是评价测量结果质量高低的重要指标。随着科学技术和生产的发展, 不确定度分析受到越来越高的重视。在静态测试领域, 有一套非常完善的理论评定测量结果的不确定度^[1]。但由于动态测试的时变性、随机性、相关性和动态性^[2], 静态评定不确定度的方法不再适用于评定动态测试的不确定度。程真英^[3]提出了动态测量误差的贝叶斯建模预报方法, 利用预报过程中插入标准量评定预报值的不确定度。贝叶斯建模预报方法虽然能够对动态测试数据的不确定度进行分析, 但对标准量的依赖较大, 且没有对模态参数识别进行不确定度分析。从模态参数识别和振动模态分析方向去研究动态测试是当代比较热门的一个研究课题, 模态参数的识别方法主要有频域辨识方法和时域辨识方法^[4]。频域辨识方法发展较早, 主要将时域信号转化为频域信号, 利用频响函数识别系统的模态参数, 可对工作情况下的机械及结构进行“在线”模态分析。但是这种方法是基于确定性的传递函数分析方法, 需要知道明确的激励信息和频响函数, 难以进行不确定度分析。模态参数的时域辨识方法解决了这一问题, 它无需频响函数, 能够进行统计分析。20 世纪 70 年代, Ibrahim^[5,6]提出的 ITD 法推动了时域模态辨识方法的发展, ITD 法主要利用结构自有响应采样数据, 建立特征矩阵的数学模型, 求得较为满意的模态参数识别的精度, 但不能从概率的角度去评定识别参数的不确定度。基于最小二乘估计理论以及脉冲响应函数与极点和留数之间的复指数关系建立的最小二乘复指数法^[7], 虽然通过优化可以识别较高精度的模态参数, 计算规模小于 ITD 法, 但却没有提供分析识别参数不确定的途径。Harvard Vold^[8]推出的多参考点复指数法, 同时利用多个激励与多个响应点之间的脉冲关系进行数据分析, 增加了参数辨识

^{*} 收稿日期: 2015-09-24; 修回日期: 2015-11-25

基金项目: 国家自然科学基金(51305121, 51575156), 111 引智计划(B12019)和中央高校基本科研业务费

通讯作者: 邓华夏(1982-), 男, 教授, 从事磁流变减振技术, 系统振动分析, 动态测试技术, 智能执行机构的研制与开发。Email: hxdeng@hfut.edu.cn

的信息量,但只是提高了识别的精度,没有涉及模态参数不确定度的分析。一种基于卡尔曼滤波理论的系统辨识方法^[9]和 Langley 研究中心的 Juang 和 Papps^[10]提出的特征系统实现算法,虽然能很好地辨识结构的模态参数,但都不是基于统计分析的方法,难以实现参数的不确定度分析。1998年, Katafygiotis^[11]等通过建立模态参数与贝叶斯统计框架关系,提出了贝叶斯模态识别方法,能够识别环境中随机激励下系统模态参数的最可能值。Yuen^[12]等在结构环境激励响应时用贝叶斯谱密度方法估计出模态参数的优化值,并根据这些参数的后验联合分布得到模态参数的不确定度。Katafygiotis 和 Yuen^[13]将这一方法应用在时域识别领域,直接对原始时域数据进行快速的傅里叶变换,应用贝叶斯方法估计出模态参数的优化值及其概率分布。为提高识别的效率,Au^[14,15]针对选定的某一共振频率带的单个模态,提出了快速贝叶斯 FFT 方法,并根据模态参数的变异系数评定其后验不确定性,不需要考虑所测试的自由度数量,提高了计算的准确性。易伟健^[16]等运用贝叶斯方法分析钢筋混凝土框架结构的模态参数,验证了此方法良好的收敛性。韩建平^[17]等运用快速贝叶斯 FFT 识别桥的模态参数与随机子空间结果对比,进一步评价了模态参数的不确定性。测试仪器、测试环境等均可能引入不确定度分量,目前虽然从统计分析角度研究了模态参数的不确定性,但是缺乏较为系统的考虑不确定度来源的评定模态参数辨识不确定度的方法。

本文基于贝叶斯方法识别结构的模态参数,结合仪器检定报告,考虑测试仪器、测试环境和测量方法引入的不确定度,通过理论分析测量数据长度、测量自由度、信噪比等因素对模态参数变异系数的影响,采用合成不确定的方法较为系统地评定模态参数识别总的不确定度。

1 基于贝叶斯方法的模态参数辨识

一个 n 自由度结构测得的加速度为 $\ddot{x}_j (j=1, 2, \dots, N)$ (N 为每个通道的采样数), \ddot{x}_j 的 FFT 变换定义为^[11]:

$$F_k = \sqrt{(2\Delta t)/N} \times \sum_{j=1}^N \ddot{x}_j \exp\{-2 \sum i[(k-1)(j-1)/N]\} \quad (1)$$

式中, Δt 是采样间隔, $k=1, 2, \dots, \text{int}[N/2]$ 。

1.1 贝叶斯理论

环境的影响、辨识模型的简化、实验仪器以及人员操作等引入的不确定因素造成测量的模态参数与系统模态参数的真值之间存在一定的偏差。加速度的数学模型为:

$$\ddot{x}_j = \ddot{x}_j(\vartheta) + \varepsilon_j \quad (2)$$

式中, $\ddot{x}_j(\vartheta)$ 是含有模态参数的理论响应; ε_j 是模态响应和测量数据之间的预测误差。模态参数 ϑ 主要包括固有频率 f 、阻尼比 ξ 、振型 ϕ 、模态激励的谱密度 S 和预测误差的谱密度 S_e 。

贝叶斯理论的基本公式为:

$$p(\vartheta/T_k) = \frac{p(T_k | \vartheta) p(\vartheta)}{p(T_k)} \propto p(T_k | \vartheta) p(\vartheta) \quad (3)$$

式中, $T_k = [\text{Re}F_k; \text{Im}F_k] \in \mathbb{R}^{2n}$; $p(\vartheta)$ 为先验分布,主要是通过经验或历史资料总结出的参数 ϑ 的先验信息; $p(\vartheta | T_k)$ 是参数的后验概率密度;当环境激励近似为宽平稳的随机信号时,由参数的联合概率得到的似然函数 $p(T_k | \vartheta)$ 可近似为:

$$p(T | \vartheta) = (2\pi)^{-nN_f} \left[\prod_k \det C_k(\vartheta)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_k T_k^T C_k(\vartheta)^{-1} T_k\right] \right] \quad (4)$$

式中, $C_k(\vartheta)$ 是 T_k 的协方差矩阵,当采样时间间隔很小时,其表达式为^[11]:

$$C_k(\vartheta) = \frac{SD_k}{2} \begin{bmatrix} \phi\phi^T & 0_n \\ 0_n & \phi\phi^T \end{bmatrix} + \frac{S_e}{2} I_{2n} \quad (5)$$

式中, D_k 类似于动态放大系数,且只与固有频率 f 、阻尼比 ξ 和对应的频率 f_k 有关。频率比 $\beta_k = f/f_k$, $D_k = [(\beta_k^2 - 1)^2 + (2\xi\beta_k)^2]^{-1}$ 。

1.2 模态参数的辨识

将式(4)简化为对数似然函数:

$$p(\vartheta | T_k) \propto \exp[-L(\vartheta)] \quad (6)$$

式中,

$$L(\vartheta) = \frac{1}{2} \sum_k [\text{Indet} C_k + T_k^T C_k T_k] \quad (7)$$

当采集的数据足够多时, 参数的后验概率密度在最可能值处用高斯概率密度函数近似, 等价于 $L(\vartheta)$ 的 Taylor 展开式:

$$L(\vartheta) \approx L(\hat{\vartheta}) + \frac{1}{2} (\vartheta - \hat{\vartheta})^T Q(\hat{\vartheta}) (\vartheta - \hat{\vartheta}) \quad (8)$$

式中, $\hat{\vartheta}$ 是模态参数的最佳估计值, $Q(\hat{\vartheta})$ 是 $L(\vartheta)$ 在 $\vartheta = \hat{\vartheta}$ 时的 Hessian 矩阵, 且 $C(\hat{\vartheta}) = Q(\hat{\vartheta})^{-1}$; $L(\hat{\vartheta})$ 近似为零可以忽略不计。后验概率密度函数可以简化为:

$$p(\vartheta | T_k) \approx \exp[-\frac{1}{2} (\vartheta - \hat{\vartheta})^T C(\hat{\vartheta})^{-1} (\vartheta - \hat{\vartheta})] \quad (9)$$

由式(9)可以看出, 模态参数的后验概率密度由模态参数的最佳估计值 $\hat{\vartheta}$ 和协方差矩阵 $C(\hat{\vartheta})$ 确定。

模态参数的最佳估计值和后验协方差矩阵是通过测量数据得到的, 而对数似然函数表达式(8)中, 一方面由于协方差矩阵存在零特征值而不可逆, 另一方面由于协方差矩阵的维数随着测量自由度的增加而增加, 即 $N_c = n + 4$ 。Au 基于单模态理论采用快速傅里叶变换^[14], 在某一共振频率带内, 不需考虑测试自由度的数量, 解决了矩阵维数随自由度增加的问题。因此, 式(7)可进一步简化为:

$$L(\vartheta) = -nN_f \ln 2 + (n-1)N_f \ln S_e + \sum_k \ln(SD_k + S_e) + S_e(d - \frac{\phi^T B \phi}{\phi^T \phi}) \quad (10)$$

式中,

$$B_0 = (\text{Re} F_k)(\text{Re} F_k)^T + (\text{Im} F_k)(\text{Im} F_k)^T$$

$$B = \sum_k (1 + \frac{S_e}{SD_k})^{-1} B_0$$

$$d = \text{tr}(\sum_k B_0)$$

当振型正则化, 即 $\phi^T \phi = 1$ 后, ϕ 的最佳估计值是矩阵 B 的最大特征值 λ 所对应的特征向量。由于矩阵 B_0 是正定矩阵, 因此最大特征值 λ 大于零。通过振型优化后的对数似然函数的表达式为:

$$L(f, \xi, S, S_e) = -nN_f \ln 2 + (n-1)N_f \ln S_e + \sum_k \ln(SD_k + S_e) + S_e(d - \lambda) \quad (11)$$

这四个参数可以通过无约束优化函数得到。

2 模态参数不确定度的分析

噪声的影响、测量误差、分析过程的简化、模态识别方法和仪器的使用都会引入不确定度因素, 造成实测的模态参数与理想真值之间存在偏差。为了更好地分析动态测试中模态参数识别的不确定度, 评定各种不确定度分量对模态参数的影响, 采用动静不确定结合的方法研究模态参数的不确定度, 并着力分析其来源。

2.1 基于贝叶斯方法的不确定度分析

协方差矩阵的对角线元素为对应参数的方差, 频率 f 、阻尼比 ξ 、模态力的谱密度 S 、预测误差的谱密度 S_e 和振型 ϕ 的方差分别为 σ_f^2 、 σ_ξ^2 、 σ_S^2 、 $\sigma_{S_e}^2$ 和 σ_ϕ^2 。五个参数方差的表达式^[15]如下所示:

$$\sigma_f^2 = \frac{f^2 \xi}{4N_d} (\tan^{-1} \alpha - \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1})^{-1} \quad (12)$$

$$\sigma_\xi^2 = \frac{\xi}{4N_d} [\tan^{-1} \alpha + \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1} - \frac{2(\tan^{-1} \alpha)^2}{\alpha}]^{-1} \quad (13)$$

$$\sigma_S^2 = \frac{S^2}{N_f} [1 - \frac{2(\tan^{-1} \alpha)^2}{\alpha(\tan^{-1} \alpha + \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1})}]^{-1} \quad (14)$$

$$\sigma_{S_e}^2 = \frac{S_e^2}{(n-1)N_f} \quad (15)$$

$$\sigma_{\phi}^2 = \frac{\xi S_e / S}{N_d \tan^{-1} \alpha} (I_n - \phi \phi^T) \quad (16)$$

式中, α 是带宽因子; N_d 是采集数据时间与周期的比值。

1) 数据长度的影响

当参数和带宽因子一定时, σ_f^2 、 σ_{ξ}^2 、 σ_{ϕ}^2 与 N_d 成反比, 而 σ_s^2 、 $\sigma_{S_e}^2$ 与 N_f 成反比。这是因为前三个参数与实际结构紧密相关, 而后两个参数仅仅与所在的环境相关。

2) 测量自由度的影响

测量的自由度首先影响的是计算的速率, 即选取的自由度越多所需计算的时间越久; 其次, 测量的自由度决定振型的维数, 自由度越多, 振型越平滑; 再次, 从方差的表达式可以看出, n 越大, σ_s^2 越小, 且对 σ_{ϕ}^2 也有一定的影响。

3) 测量噪声的影响

测量噪声包括来自传感器、信号采集器、电荷放大器等电子设备工作时产生的噪声, 为了便于评定建模误差与测量噪声引起的预测误差, 定义在频率为 f_k 处信噪比 η 的表达式为:

$$\eta = \frac{SD_k}{S_e} \quad (17)$$

在功率谱的峰值处, 由于 $f/f_k \sim 1$ 则 $D_k \sim 1/4\xi^2$, $\eta = S/(4S_e\xi^2)$, 此时 σ_{ϕ}^2 简化为:

$$\sigma_{\phi}^2 = \frac{\eta^{-1}}{4\xi N_d \tan^{-1} \alpha} (I_n - \phi \phi^T) \quad (18)$$

当 $\eta \gg 1$ 时, 振型的分散性较小; 反之, 则振型的方差较大, 从而影响高阶模态参数的识别。

4) 频带宽度的影响

当时域数据选取过少时, 会造成信息的遗漏; 当数据选择过多时, 一方面影响效率, 另一方面会引入多模态形式, 增加运算难度。因此选择一个带宽因子 α 确定合适的频带宽度。

2.2 参数识别方法引入的不确定度

模态辨识方法如频响函数法、时域法在计算过程中都会引入一定量的不确定度。这类不确定度可以通过建立数学模型进行相关的评定。一般情况, 试验的次数越多, 则不确定的分量越小。但是对于特殊的情况, 则会引入较大不确定度。这类不确定分量可通过数据的统计特性进行分析, 选择 A 类不确定度进行评定。

建立误差模型如式(19)所示, 通过贝塞尔公式(20)计算模态参数的标准差:

$$v_j = \vartheta_r - \vartheta_{r0} \quad (19)$$

$$u_i^r = \sqrt{\frac{\sum (v_j)^2}{n-1}} \quad (20)$$

式中, v_j 、 ϑ_r 、 ϑ_{r0} 分别表示第 r 阶模态参数的残差、实验值、理论值。

2.3 仪器的影响

试验中所用到的仪器是数据采集器和加速度传感器, 这两种仪器在出厂时都含有相应的误差。这种误差对不确定的影响不能通过其他的方法进行消除, 但是可以根据相关的检测报告进行 B 类不确定的评定。

3 实例分析

模态参数的具体实例分析中, 梁是最为典型的模型。本文以固支梁振动为研究对象, 通过 DH5922 信号分析系统和加速度传感器采集数据, 如图 1 所示。通过布置梁的节点, 得到每个节点的加速数据, 然后对其进行频谱分析得到功率谱密度, 如图 2 所示。

3.1 模态参数的最佳估计值

根据谱对应的峰值选择对应的阶次及频带宽度, 利用公式(10)和(11)优化得到固支梁最佳估计值。振型的最佳估计值如图 3 所示, 频率、阻尼及功率谱的最佳估计值如表 1 所示。

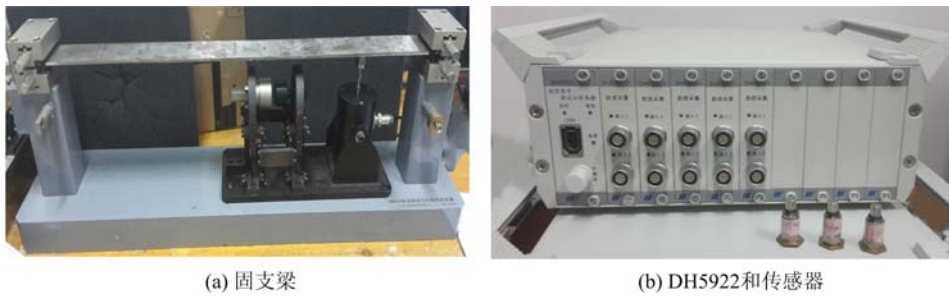


图 1 试验对象(a)与测试仪器(b)

Fig.1 Test object (a) and test instrument (b)

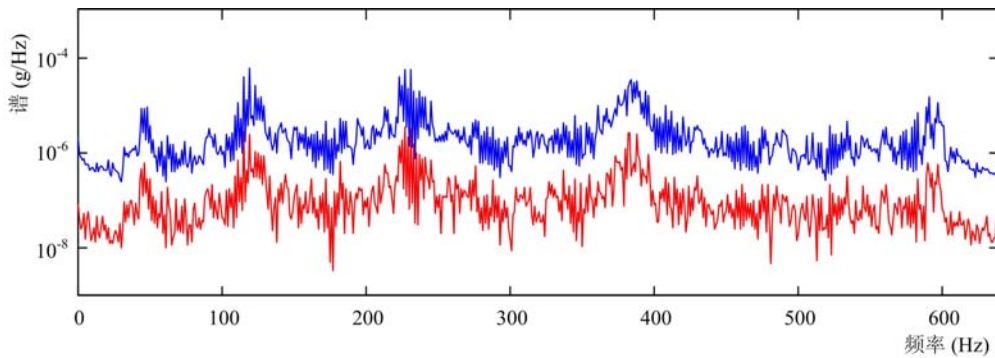


图 2 固支梁的功率谱

Fig.2 The power spectrum of the solid supported beam

表 1 前三阶固有频率、阻尼比、激励及预测误差功率谱的最佳估计值
Tab.1 The most probable value of the first three order natural frequency, damping ratio, excitation and prediction error power spectrum

阶次	参数	最佳估计值	理论值
第一阶	$f(\text{Hz})$	45.5542	45.54
	$\xi(\%)$	0.4846	0.48
	$S(g/\sqrt{\text{Hz}})$	10.2780	10
	$S_e(g/\sqrt{\text{Hz}})$	1.0051	1
第二阶	$f(\text{Hz})$	120.7245	120.74
	$\xi(\%)$	0.4004	0.40
	$S(g/\sqrt{\text{Hz}})$	9.8092	10
	$S_e(g/\sqrt{\text{Hz}})$	1.0026	1
第三阶	$f(\text{Hz})$	226.5680	226.42
	$\xi(\%)$	1.0313	0.99
	$S(g/\sqrt{\text{Hz}})$	9.5075	10
	$S_e(g/\sqrt{\text{Hz}})$	0.9765	1

3.2 模态参数变异系数来源的分析

1) 噪声的影响

信号采集系统和加速度传感器的工作都会引入一定量的误差,本文假设预测误差都是由信号采集系统与传感器产生的。模态参数的最佳估计值与 n/s (信号与测量噪声之比) 比值的关系如图 4 所示。

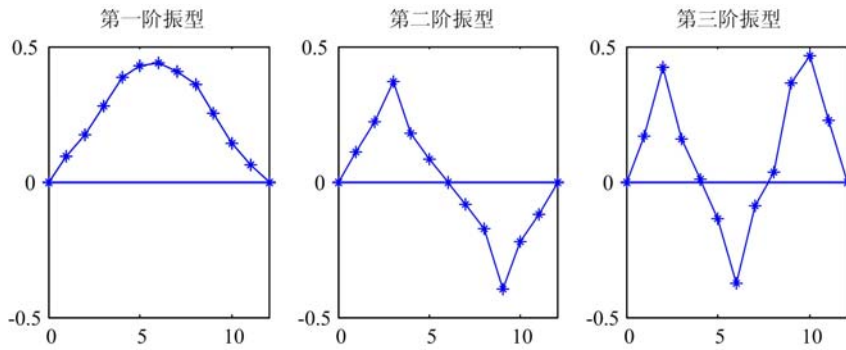


图3 前三阶振型的最可能值

Fig. 3 The most probable value of the first three mode shape

振型方差、预测误差谱密度的标准差与测量噪声成正比关系,其他参数的方差受影响。 n/s 的比值在一定范围内对频率与阻尼比有一定的影响,但是超过一定范围后, n/s 值的大小对频率和阻尼比的影响较小可以忽略不计。

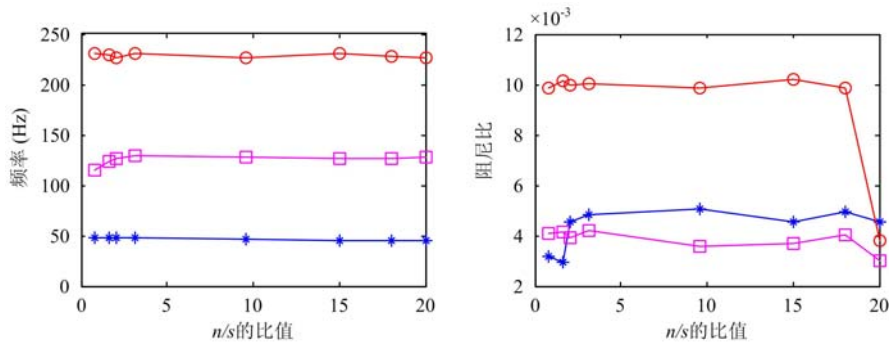


图4 n/s 的比值与前三阶频率、阻尼的关系,第一阶—蓝色,第二阶—粉色,第三阶—红色

Fig. 4 The relationship between ratio of n/s and the first three order frequency and damping. 1-blue, 2-pink, 3-red

2) 带宽因子的影响

从模态参数方差的表达式可以看到,带宽因子直接与频率、阻尼比、模态力的功率谱相关,与预测误差、振型无直接的关系。图5反映的是带宽因子与频率、阻尼比后验变异系数之间的关系。当带宽因子小于12时,频率、阻尼比的变异系数随着带宽因子的增大而减小;当带宽因子大于12时,频率、阻尼比的变异系数变化不明显。

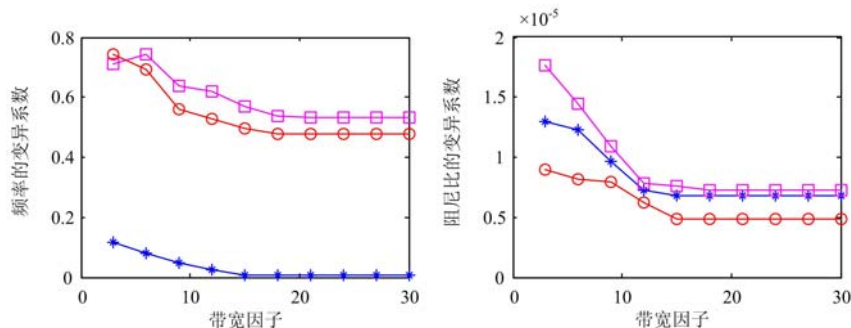


图5 带宽因子与前三阶频率、阻尼比的关系。第一阶—蓝色,第二阶—粉色,第三阶—红色

Fig. 5 The relationship between bandwidth factor and the first three order frequency and damping. 1-blue, 2-pink, 3-red

3) 自由度的影响

对于固支梁而言,自由度越多得到的振型越平滑。选取不同的自由度进行测量分析,固支梁的前三

阶频率与阻尼比的变异系数如图 6 所示。随着测量自由度数目的增多,频率、阻尼比的变异系数有减小的趋势,但是并不明显。

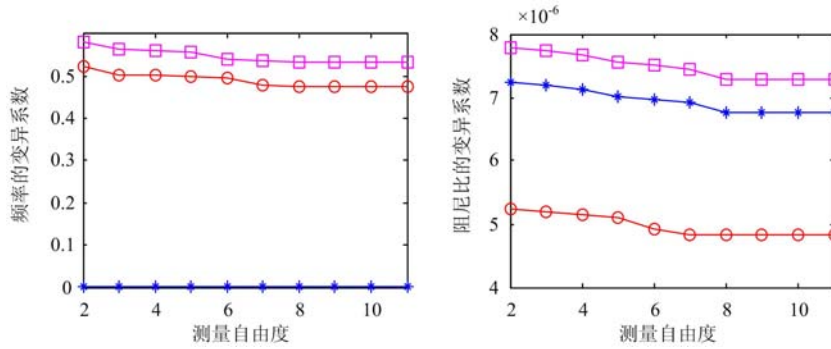


图 6 测量自由度与前三阶频率、阻尼比的关系。第一阶—蓝色,第二阶—粉色,第三阶—红色

Fig. 6 The relationship between measured degree of freedom and the first three order frequency and damping. 1-blue,2-pink,3-red

4) 测量数据长度的影响

数据长度的选取直接影响固支梁模态参数的估计值的准确度。只有当数据足够多时,似然函数可以利用高斯分布进行简化计算。从图 7 中可以看出,频率、阻尼比的变异系数随着数据长度的增加而减小。

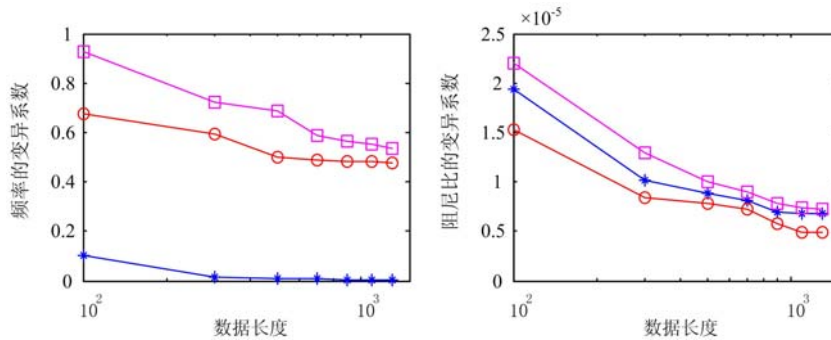


图 7 数据长度与前三阶频率、阻尼比的关系。第一阶—蓝色,第二阶—粉色,第三阶—红色

Fig. 7 The relationship between data length and the first three order frequency and damping. 1-blue,2-pink,3-red

3.3 不确定度的计算

1) 模态辨识方法引入的不确定度分量

测量的数据分为 10 组,利用贝叶斯方法识别模态参数的最佳估计值,然后根据公式(19)、(20)计算得到固支梁模态参数的标准差。

$$\begin{aligned}
 u_1^f(f) &= 0.069\text{Hz}, u_2^f(f) = 0.728\text{Hz}, u_3^f(f) = 0.685\text{Hz} \\
 u_1^\xi(\xi) &= 0.272\%, u_2^\xi(\xi) = 0.269\%, u_3^\xi(\xi) = 0.218\%
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

2) 数据采集引入的不确定度分量

数据长度、测量自由度、带宽的选取及噪声都会引入不确定度。这些不确定度分量可以通过贝叶斯方法求取得到的变异系数进行分析。根据 3.2 的分析, n/s 的值、带宽因子、测量自由度、测量数据长度分别为 10、12、11、1280。频率、阻尼比、模态力的功率谱和预测误差的方差分比为:

$$\begin{aligned}
 \delta_f^1 &= 0.103\text{Hz}, \delta_f^2 = 0.629\text{Hz}, \delta_f^3 = 0.713\text{Hz} \\
 \delta_\xi^1 &= 0.319\%, \delta_\xi^2 = 0.297\%, \delta_\xi^3 = 0.413\% \\
 \delta_s^1 &= 0.372\text{g}/\sqrt{\text{Hz}}, \delta_s^2 = 0.463\text{g}/\sqrt{\text{Hz}}, \delta_s^3 = 0.561\text{g}/\sqrt{\text{Hz}} \\
 \delta_{s_e}^1 &= 0.093\text{g}/\sqrt{\text{Hz}}, \delta_{s_e}^2 = 0.183\text{g}/\sqrt{\text{Hz}}, \delta_{s_e}^3 = 0.073\text{g}/\sqrt{\text{Hz}}
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

3) 仪器引入的不确定分量

经查阅相关资料,信号分析系统在温度(23℃±5℃)内数据转化的示值精度小于0.1%,服从均匀分布,信号分析系统引入的不确定度分量 u_{s1} 为:

$$u_{s1} = \frac{0.001}{\sqrt{3}} = 0.0005 = 0.001 \quad (23)$$

加速度传感器引入的不确定度分量 u_{s2} :根据加速度传感器产品检验的鉴定书,在温度为(23℃±5℃)、频率为1~10000Hz内,加速度传感器的精度不大于5%,且服从均匀分布。

$$u_{s2} = \frac{5 \times 10^{-2}}{\sqrt{3}} = 0.028 \quad (24)$$

假设信号分析系统与加速度传感器引入的不确定度相互独立,则仪器的精度引入的不确定度分量为:

$$u_3 = \sqrt{u_{s1}^2 + u_{s2}^2} \approx 0.028 \quad (25)$$

4) 不确定度的合成

模态参数的识别方法、贝叶斯不确定分量和仪器精度引入的不确定度是相互独立的,建立合成不确定度公式:

$$u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \quad (26)$$

在贝叶斯参数的方差计算中,频率、阻尼比与模态力的功率谱、预测误差的功率谱是相互影响而非独立的。根据各参量对参数变异系数的影响,假设频率、阻尼比与预测误差功率谱之间的关系为 ρ_{ij} ($-1 < \rho_{ij} < 1$)。频率和阻尼的不确定度分量为:

$$u_{\xi} = \sqrt{\sum \delta_{ij} + 2 \sum \rho_{ij} \delta_i^{1/2} \delta_j^{1/2}} \quad (27)$$

代入数据计算得到各阶频率、阻尼比的不确定度分量如下所示:

$$\begin{aligned} u_1^1(f) &= 0.038\text{Hz}, u_2^1(f) = 0.801\text{Hz}, u_3^1(f) = 0.819\text{Hz} \\ u_1^2(\xi) &= 0.564\%, u_2^2(\xi) = 0.602\%, u_3^2(\xi) = 0.613\% \end{aligned} \quad (28)$$

将各不确定度分量代入式(23)得到合成不确定度的结果,如表2所示。

通过三种不确定度分量的对比,仪器精度引入的不确定度较小,模态识别方法和其他引入的不确定度分量是识别模态不确定度的主要部分。

表2 前三阶模态参数的合成不确定度及不确定度分量

Tab.2 Synthesis uncertainty and uncertainty components of the first three order modal parameters

	第一阶		第二阶		第三阶		
	频率(Hz)	阻尼比(%)	频率(Hz)	阻尼比(%)	频率(Hz)	阻尼比(%)	
合成不确定度	0.084	0.709	1.082	0.660	1.068	0.668	
不确定度分量	u_1	0.069	0.272	0.728	0.269	0.685	0.218
	u_2	0.038	0.654	0.801	0.602	0.819	0.631
	u_3	0.028	0.028	0.028	0.028	0.028	0.028

4 结论

本文基于贝叶斯理论,提出了一种动态测试模态识别的不确定度分析方法。模态识别方法、模型简化、仪器测试精度等均会引入测试的不确定度,造成实测模态与理论真值之间的误差。本文以固支梁为例,通过贝叶斯识别方法,根据统计特性引入模态参数识别的不确定度分量,结合仪器的检定报告,分析数据长度、测量自由度、噪声的影响及带宽因子等因素引入的不确定度分量,系统地分析了模态参数识别的不确定度。通过分析发现,在动态测试中,仪器精度引入的不确定度分量对总的合成不确定度影响较小,主要的不确定度分量来源于模态识别方法和测试环境及测试数据等因素。

致谢 作者感谢以下资金支持, 国家自然科学基金(51305121, 51575156), 111 引智计划(B12019) 和中央高校基本科研业务费。

参考文献:

- [1] 费业泰, 陈晓怀. 误差理论与数据处理[M]. 机械工业出版社, 2010 (FEI Yetai, CHEN Xiaohuai. Error theory and data processing[D]. Machinery Industry Press, 2010(in Chinese))
- [2] 费业泰, 卢荣胜. 动态测量误差修正原理与技术[M]. 中国计量出版社, 2001 (FEI Yetai, LU Rongsheng. Dynamic measurement error correction principle and technology[M]. China Metrology Press, 2001 (in Chinese))
- [3] 程真英. 动态测量误差的贝叶斯建模预报及不确定度研究[D]. 合肥工业大学, 2004 (CHENG Zhenying. Study on Bayes modeling and predicting for dynamic measurement errors and measurement uncertainty[D]. Hefei University of Technology, 2004(in Chinese))
- [4] 傅志方, 华宏星. 模态分析理论与应用[D]. 上海交通大学出版社, 2000 (FU Zhifang. Modal analysis theory and applications[D]. Shanghai Jiaotong University Press, 2000(in Chinese))
- [5] Ibrahim S R. Application of random time domain analysis to dynamic flight measurements[J]. Shock and Vibration Bulletin, 1979, 49(2):165-170.
- [6] Ibrahim S R, Mikuleik E C, Ibrahim S R, et al. A time domain modal vibration test technique[J]. Shock & Vibration Bulletin, 1973, 43:21-37.
- [7] 傅志方. 模态参数识别的最小二乘复指数法[R]. 上海交通大学振动冲击噪声研究所, 1986 (FU Zhifang. Modal parameter identification of Least Square Complex Exponential Method[R]. Shanghai Jiaotong University Institute of Vibration Impact Noise, 1986(in Chinese))
- [8] Mergeay M. Least Squares Complex Exponential Method and Global System parameters estimation used by modal analysis[C]. Proc. of the 5th International Seminar on Modal Analysis, 1983.
- [9] 倪金福. 用卡尔曼滤波技术识别振动系统参数[J]. 振动与冲击, 1982, 2(4):23-36 (NI Jinfu. Using Kalman Filter to identify vibration system parameters[J]. Journal of Vibration and Shock, 1982, 2(4):23-36 (in Chinese))
- [10] Juang J N, Papps R S. An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and modal reduction[J]. Journal of Guidance Control & Dynamics, 1985, 8(5):620-627.
- [11] Katafygiotis L S, Beck J L. Updating models and their uncertainties II: Model identify ability [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1998, 124(4):463-467.
- [12] Yuen K V, Katafygiotis L S. Bayesian Modal updating using complete input and incomplete response noisy measurements[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2002, 128(3):340-350.
- [13] Katafygiotis L S, Yuen K V. Bayes spectral density approach for modal updating using ambient data [J]. Earthquake Engineering Structural Dynamics, 2001, 30(8):1103-1123.
- [14] Au S K. Fast Bayesian FFT method for ambient modal identification with separated modes[J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 2011, 137(3):214-226.
- [15] Au S K. Connecting Bayesian and frequentist quantification of parameter uncertainty in system identification[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2012(29):328-342.
- [16] 易伟健, 吴高烈, 徐丽. 模态参数不确定性分析的贝叶斯方法研究[J]. 计算力学学报, 2006(23):700-705 (YI Weijian, WU Gaolie, XU Li. A study on the uncertainty of model parameters by Bayesian method[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2006(23):700-705(in Chinese))
- [17] 韩建平, 郑沛娟. 环境激励下基于快速贝叶斯 FFT 的实桥模态参数识别[J]. 工程力学, 2014, 4(4):119-125 (HAN Jianping, ZHENG Peijuan. Modal parameter identification of an actual bridge by Fast Bayesian FFT method under ambient excitation[J]. Engineering Mechanics, 2014, 4(4):119-125 (in Chinese))

Analysis of Uncertainty of Modal Parameters Identification based on Bayesian Method

WANG Jun, DENG Hua-xia, ZHANG Jin, YU Lian-dong

(School of Instrument Science and Optoelectronics Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, Anhui, China)

Abstract: Vibration modal analysis and modal parameters identification are important for dynamic testing. Modal parameters are essential for the model updating, response forecasting, system health monitoring and vibration control. However, the uncertainty analysis of dynamic testing, especially for modal parameters, is inadequate. In this paper, the corresponding relationship between time domain data and frequency domain data is established by using fast Fourier transform (FFT) based on Bayesian method. According to the response data of multiple modes in the resonance frequency band, the most probable value and the uncertainty of modal parameters identification are obtained. In the modal experiment of solid supported beam, the acceleration transducers were used to collect vibration data of system under ambient excitation. The modal identification and the most probable value of modal parameters were obtained by Bayesian method. The total uncertainty and uncertainty component of modal parameters identification were analyzed systematically by using the most probable value and instrument calibration report.

Keywords: Bayesian method; modal parameters; uncertainty; dynamic testing