

文章编号:1001-4888(2019)03-0365-08

一种由圆柱体试件的侧向压缩力-位移关系 同时测量材料弹性模量和泊松比的新方法^{*}

张玉婷, 丁榕, 左泽宇, 汤立群, 刘逸平, 蒋震宇, 刘泽佳, 周立成

(华南理工大学 土木与交通学院工程力学系, 广州 510640)

摘要: 材料的弹性模量和泊松比是材料表征的重要力学参数,传统的压缩试验需要同时测量荷载、压缩和横向变形,才能实现对弹性模量和泊松比的同时测量。本文从 Hertz 接触理论出发,推导出弹性圆柱体在侧向压缩下的位移-力关系公式,在该关系式中位移与力的关系除与试件的几何尺寸相关外,还取决于材料的弹性模量和泊松比。因此,可以通过对侧向压缩试验测得的力-位移关系进行非线性拟合,得到材料的弹性模量和泊松比。本文通过对硅胶材料开展轴向与侧向压缩试验,对比两种试验测量得到的弹性模量和泊松比,结果较为一致,验证了本文提出方法的可行性。对于模量较小的软物质,因加载过程的荷载常常较小,系统测量的位移可代表试件的变形位移,故本文提出的新测量方法特别适合应用于该类型材料的相关性能测量。

关键词: 侧向压缩; 力-位移关系; 弹性模量; 泊松比

中图分类号: O341

文献标识码: A

DOI: 10.7520/1001-4888-18-170

0 引言

材料的弹性模量和泊松比是用于表征材料力学性能的基本参数,特别是软物质的泊松比常常接近 0.5,横向变形较大,需要准确测量。单向应力下的拉伸法和压缩法是用于测量材料弹性模量和泊松比的传统方法,近年来在接触理论的基础上发展了压痕法^[1-3]和云纹法^[4,5]等试验方法以满足不同特性材料的测量需求。

单轴压缩是测量材料弹性模量和泊松比常用的试验方法,在满足单向应力的情况下,材料的弹性模量和泊松比可通过各种引伸计配合二次仪表采集数据获得横纵向应变数据测得^[6]。然而对于引伸计或是二次仪表采集得到的应变数据,通常会由于二次以至多次测量转换导致误差积累,影响测量精度。考虑到该问题,有学者提出数字图像相关法(digital image correlation,简称为 DIC)可较为准确地确定材料的泊松比^[7-9]。二维数字图像相关法实现简单但局限于平面物体表面的面内位移测量,三维数字图像相关法虽可对曲面进行三维变形场测量,但对试验条件(如需有两台摄像机且相互标定位置和姿态、试验过程中环境的一致性)要求较高^[10]。总而言之,目前现有的对材料泊松比的测量方法中,除了原加载测量系统外,都需要附加一个用于测量试件水平变形的测量系统,比较复杂。

为降低模量较小的软物质在泊松比测量时的复杂性,本文提出了一种通过对圆柱体侧向压缩力-位移关系的非线性拟合,同时得到材料弹性模量和泊松比的方法,实现用单轴压缩试验同时测量材料的弹

^{*} 收稿日期: 2018-07-22; 修回日期: 2018-09-24

基金项目: 国家自然科学基金资助(11472109)

通讯作者: 汤立群(1966—),男,博士,教授,博导。主要研究领域包括:(1)非均质材料微观结构与破坏机理;(2)结构损伤与长期健康监测;(3)冲击动力学等。Email:lqtang@scut.edu.cn

性模量与泊松比。

1 测量原理

Hertz 接触理论能给出弹性圆柱形试件在侧向压缩下的接触面积与外加荷载的关系^[11],但并没有给出荷载与位移的关系。因此,有必要根据 Hertz 接触理论推导出圆柱体侧向压缩下的位移-力关系式。

由弹性理论^[11]知,轴线平行的两圆柱体接触时,接触半宽 b 和力 F 的关系为

$$b = \sqrt{\frac{4F(k_1 + k_2)R_1R_2}{L(R_1 + R_2)}} \quad (1)$$

$$k_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1}, k_2 = \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \quad (2)$$

式中, L 为圆柱体高度; $2b$ 为接触面的宽度; R_1 、 R_2 分别为两圆柱体底面半径; E_1 、 ν_1 为第一个圆柱体的弹性模量和泊松比; E_2 、 ν_2 为第二个圆柱体的弹性模量和泊松比。

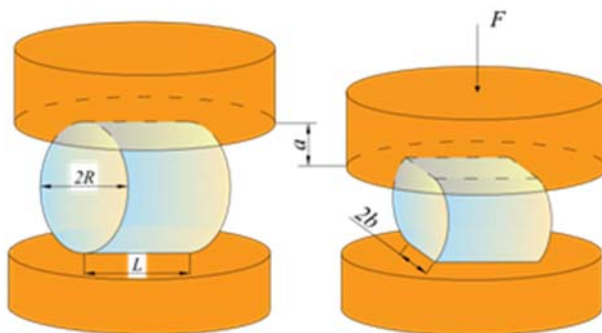


图 1 侧向压缩示意图

Fig. 1 Diagrammatic sketch of lateral compression

将第一个圆柱体简化为刚性平面,第二个圆柱体不变,仍为弹性圆柱体(图 1)。由 $\frac{1}{R_1} \rightarrow 0$, $E_1 \rightarrow \infty$, 即 $k_1 \rightarrow 0$, 令 $R = R_2$, $E = E_2$, $\nu = \nu_2$, 弹性圆柱体在径向承受两平行刚体板压缩作用时 b - F 关系为

$$b = \sqrt{\frac{F \cdot 4R(1 - \nu^2)}{L\pi E}} \quad (3)$$

当弹性圆柱体在径向承受两平行刚体板压缩作用时,由图 1 可知接触面为一狭长矩形(图 2),以矩形中点为原点建立极坐标系,定义原点沿圆柱径向的位移为 w ,则整个圆柱体径向减少的长度为 $a = 2w$ 。

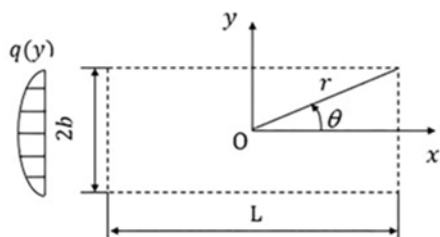


图 2 矩形接触面图

Fig. 2 Rectangular contact surface

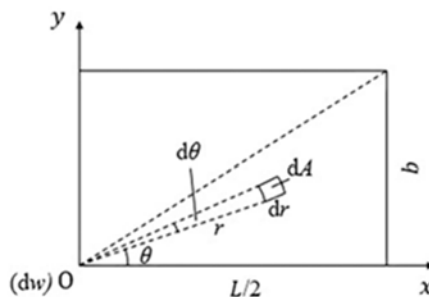


图 3 矩形四分之一区域

Fig. 3 One quarter of the rectangular domain

因矩形沿 x 、 y 轴两两对称,即几何对称和受力对称,取矩形的四分之一区域(图 3)来推导位移-力关系公式。

在半无限大物体内一点,由作用荷载 F 所引起的位移解可知,在极坐标下,单元面上的荷载微元 $qrd\theta$ 所对应的原点沿圆柱径向的位移微元 $d\omega$ 为

$$d\omega = \frac{(1-\nu^2)}{\pi E r} q r d\theta = \frac{(1-\nu^2)}{\pi E} q d\theta \quad (4)$$

式中, q 为沿接触面宽度的压力分布; E 、 ν 、 R 为圆柱体的弹性模量、泊松比和底面半径; r 、 θ 为微元的极径和极角。

将 $q = \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \cdot q_0$, $y = r \sin \theta$ 代入式(4),对接触面矩形的四分之一积分得:

$$\omega = \frac{(1-\nu^2)}{\pi E} q_0 \iint \sqrt{1 - \frac{r^2 \sin^2 \theta}{b^2}} dr d\theta \quad (5)$$

对上述积分分为两个区域分别积分(图4)。

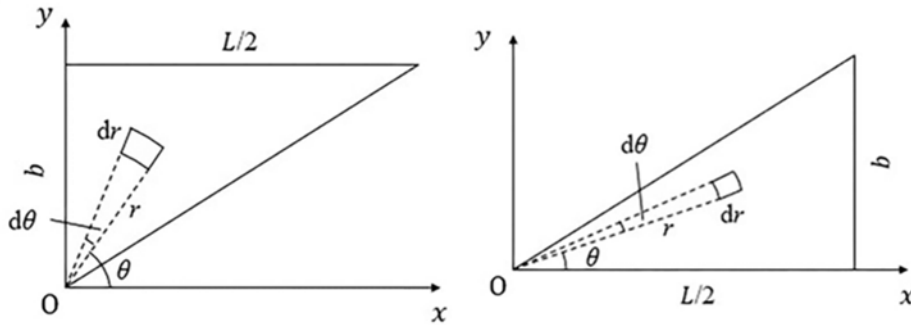


图4 积分区域

Fig. 4 Domains of integration

对第二个积分区域积分,有

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{(1-\nu^2)}{\pi E} q_0 \int_0^{\arctan \frac{2b}{L}} \int_0^{\frac{L}{2 \cos \theta}} \sqrt{1 - \frac{r^2 \sin^2 \theta}{b^2}} dr d\theta \\ &= \frac{(1-\nu^2)}{\pi E} q_0 \left[\int_0^{\arctan \frac{2b}{L}} \frac{L}{4b} \frac{1}{\cos \theta} \sqrt{b^2 - \left(\frac{L}{2} \tan \theta\right)^2} d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\arctan \frac{2b}{L}} \frac{b}{2} \frac{1}{\sin \theta} \arcsin \left(\frac{L}{2b} \tan \theta\right) d\theta \right] \end{aligned} \quad (6)$$

将 $\frac{1}{\cos \theta}$ 、 $\tan \theta$ 、 $\frac{1}{\sin \theta}$ 、 $\arctan \theta$ 、 $(1+\theta)^{\frac{1}{2}}$ 的幂级数展开式代入式(6),令 $t = \arctan \frac{2b}{L}$,略去 t^7 以上的高阶小量,得

$$\begin{aligned} \frac{\omega_1}{L} &= \frac{t}{2} + \left(\frac{1}{12} - \frac{L^2}{144b^2} \right) t^3 + \left(\frac{1}{48} - \frac{7L^2}{1440b^2} - \frac{L^4}{6400b^4} \right) t^5 \\ &\quad + \left(\frac{31}{30240} - \frac{311L^2}{120960b^2} - \frac{11L^4}{53760b^4} - \frac{L^6}{28672b^6} \right) t^7 \end{aligned} \quad (7)$$

对第一个积分区域积分,有

$$\omega_2 = \frac{(1-\nu^2)}{\pi E} q_0 \int_{\arctan \frac{2b}{L}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{b}{\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)}} \sqrt{1 - \frac{r^2 \sin^2 \theta}{b^2}} dr d\theta = -\frac{(1-\nu^2)}{\pi E} q_0 \frac{\pi b}{4} \ln \frac{\sin t}{1 + \cos t} \quad (8)$$

而

$$\omega = 4(\omega_1 + \omega_2) \quad (9)$$

$$a = 2\omega \quad (10)$$

则 a - F 关系公式为

$$\delta = \frac{a}{2R} = \frac{4L}{\pi R} \sqrt{\frac{F}{LR} \frac{(1-\nu^2)}{\pi E}} \times \left(a_1 t + a_2 t^3 + a_3 t^5 + a_4 t^7 - \frac{\pi b}{4L} \ln \frac{\sin t}{1 + \cos t} \right) \quad (11)$$

式中, δ 可以视为无量纲化的位移,而参数 t 、 b 、 $a_1 \sim a_4$ 的表达式如下所示

$$b = 2R \sqrt{\frac{F}{LR} \frac{(1-\nu^2)}{\pi E}}, \quad t = \arctan \frac{2b}{L},$$

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{12} - \frac{L^2}{144b^2}, \quad a_3 = \frac{1}{48} - \frac{7L^2}{1440b^2} - \frac{L^4}{6400b^4},$$

$$a_4 = \frac{31}{30240} - \frac{311L^2}{120960b^2} - \frac{11L^4}{53760b^4} - \frac{L^6}{28672b^6}$$

因此,对于给定的圆柱形试件,测量得到该试件侧向压缩的力-位移关系,就可以用公式(11)进行非线性拟合,得到材料的弹性模量 E 和泊松比 ν 。

2 试验方案设计

2.1 试件的制备

我们用医用硅胶材料制备试件,开展实验研究,验证本文提出的测量方法。以下为试件的制备方法:

用量筒量取等体积的用于制备硅胶的 A 胶和 B 胶倒入烧杯混合,用玻璃棒顺时针搅拌约 3 分钟使 A、B 胶充分均匀地混合。将混合后的胶体倒入洁净的模具内挑出气泡后将模具密封,在室温下静置 1 至 2 天待试件完全成型。

用于制备以上试件的圆柱体模具尺寸为 $R=L=15\text{mm}$,如图 5 所示。

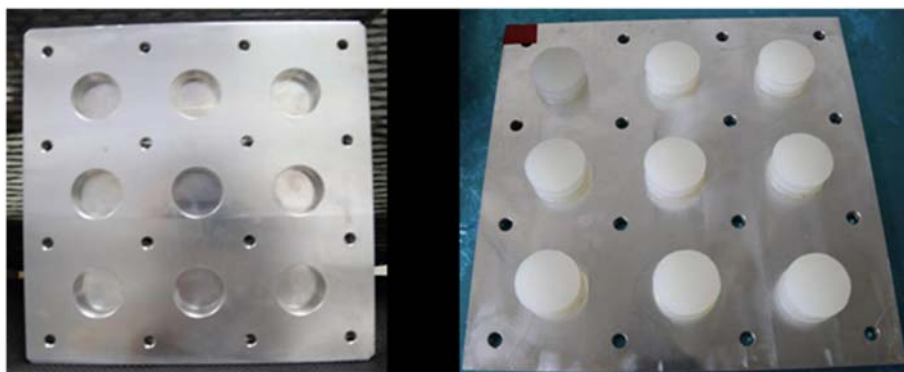


图 5 圆柱体模具及试件

Fig. 5 The cylindrical mould and test specimens

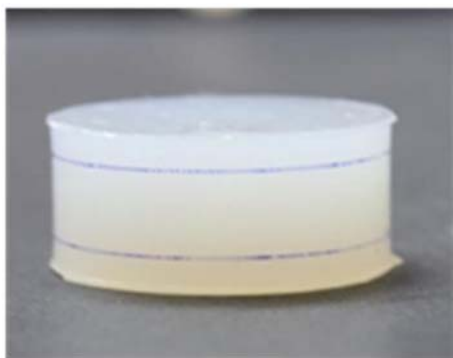


图 6 测量基准面

Fig. 6 Datum planes for measurement

依次给硅胶试件编号。检查硅胶成型情况,剔除掉表面有不可忽略气泡的试件 1。用游标卡尺测量试件 2~9 的试件尺寸,分别取平均得到硅胶的高度 $L=15.47\text{mm}$ 、底面半径 $R=14.83\text{mm}$ 。考虑到由试件上下表面与压头接触存在的不可忽略的摩擦造成的试件不均匀变形,分别以距上下表面 $1/5$ 圆柱高度处的横截面为测量基准面(图 6),用于试验结束后的图片处理。

2.2 轴向压缩试验

(1) 用黑色硬钢板作为背景,调整并固定好数码相机(Canon,EF-S 18-200mm f/3.5-5.6 IS)的位置。

(2) 为减小试件上下表面的摩擦造成试件不均匀变形的影响,在试件的上、下底面分别涂一层油,将试件放置于试验机压盘中心处,并调整试验机压头使之与试件上表面恰好接触而几乎没有压力。

(3) 设定试验机压头向下移动的速率为 0.02mm/s ,当总位移为 3mm 时试验停止。

(4) 调整相机的焦距后开始试验,试验过程中关闭室内所有光源,使用相机闪光灯,每间隔 2s 采集一张图像。

(5) 试验结束后对所采集的图像进行处理,得到每一时刻试件的径向真实应变,由试验机数据得到对应的荷载和位移,并计算出试件的轴向真实应力与轴向真实应变。绘制轴向真实应力-真实应变曲线和泊松比-轴向真实应变曲线,分别得到材料的弹性模量和泊松比。

2.3 侧向压缩试验

试件如图7所示放于试验机上,上下曲面涂上少许油以减少压头与试件的摩擦。设置试验机的加载方式为位移加载,加载速率为 0.02mm/s ,除以直径后得其特征应变率 10^{-4}s^{-1} 量级,可视为准静态加载。确保试验机压头与试件接触后开始加载,当加载位移达到 8mm 时停止试验。试验结束后提取试验机记录的力-位移数据,以便接下来的拟合分析。由于硅胶材料弹性模量较低,试验机测量的位移可以代表材料的真实变形产生的位移。



图7 侧向压缩试验

Fig.7 Lateral compression experiment

用于进行本文试验的加载系统由电磁驱动,具有较高的精度;且本文所涉及的轴向压缩与侧向压缩试验的最终荷载与加载位移都在该加载系统的量程允许范围内,故用试验机的位移表示被压试件的实际压缩位移是合理可行的。

3 试验结果与处理

3.1 轴向压缩试验结果

图8是由数码相机拍摄的轴向压缩试验过程中试件的压缩变形照片,通过图像处理测量各时刻试件的径向变形,结合试验机的位移,进而可计算各试件的泊松比。

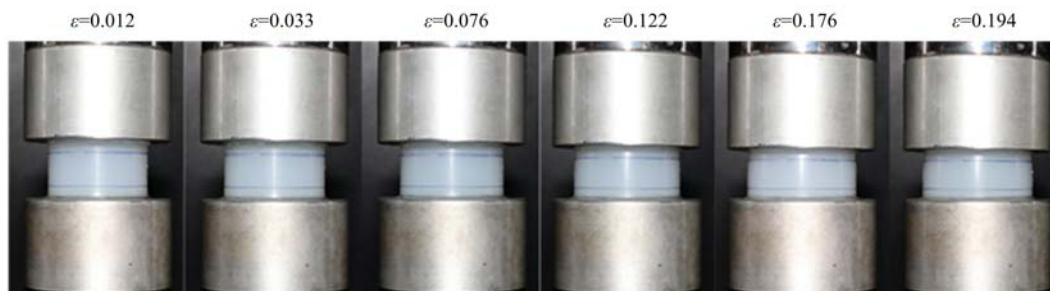


图8 各时刻轴向压缩变形图

Fig.8 Diagrams of instantaneous deformation under axial compression

轴向真实应力-真实应变关系如图9所示,由图可知在8组数据中试件7和试件9的离散性较大,通过荷载-时刻关系可知为试件个体差异,可认为试件2~9的轴向真实应力-真实应变曲线是合理的,可作为侧向压缩试验处理结果的检验。综上,由轴向压缩试验得到的试件的弹性模量为 $0.31\sim 0.36\text{MPa}$ 。

由图10可知,当试件的轴向真实应变小于 0.0875 时,测量误差对于泊松比的测量将产生较为显著的影响,故分析轴向真实应变大于 0.0875 时各试件的泊松比可知,材料的泊松比在 $0.45\sim 0.49$ 范围。

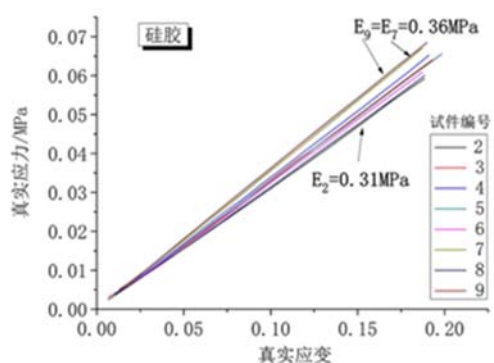


图 9 轴向真实应力-真实应变关系

Fig. 9 Axial true stress-true strain relationships

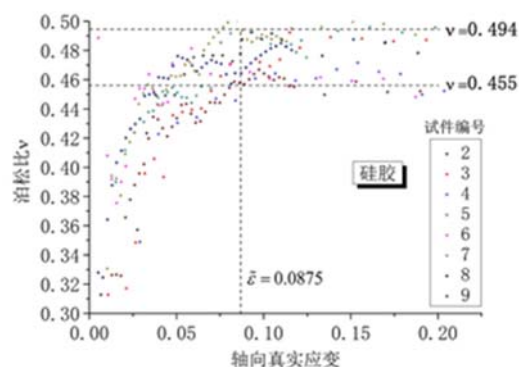


图 10 泊松比

Fig. 10 Poisson's ratio

3.2 侧向压缩试验结果

(1) 因硅胶试件质地较软,压缩刚开始时力-位移关系曲线会因测量系统精度问题,导致初始接触面沿轴向非严格均匀,类似地采用单轴压缩的数据处理方式,取每条曲线荷载达到 0.1N 的点为原点进行修正,得到如图 11(a)的力-位移关系图,从中可以看出它们的重复性较好,可用于做本文提出的材料参数拟合。如果用无量纲位移表示,则 δ - F 的关系如图 11(b)所示。

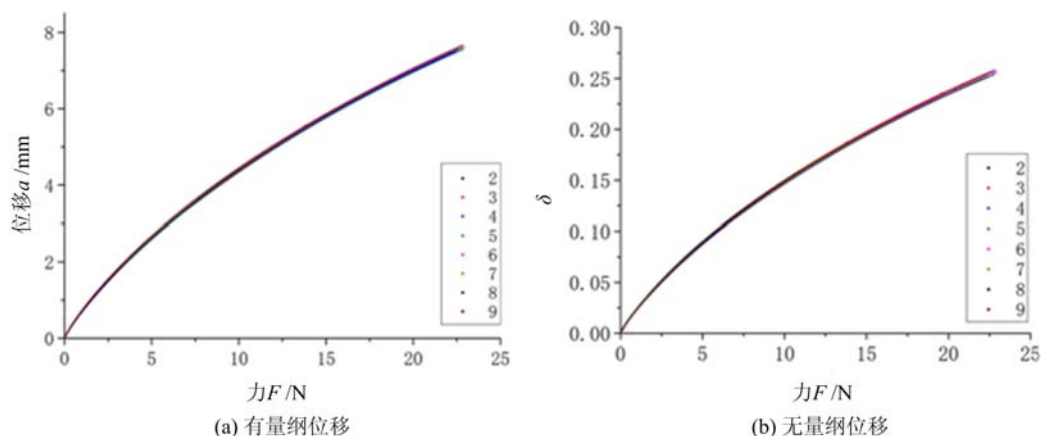


图 11 侧向压缩力-位移关系

Fig. 11 Force-displacement relationship under lateral compression

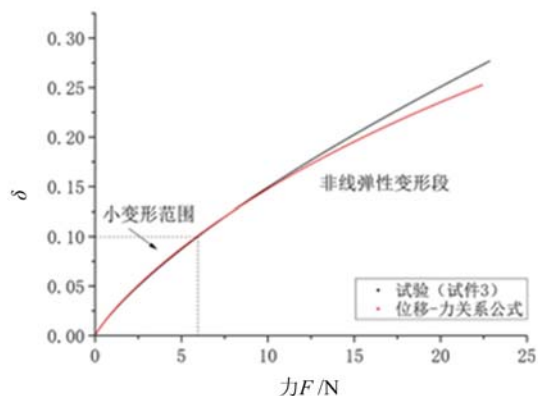


图 12 小变形范围的确定

Fig. 12 Determination of small deformation range

(2) 材料参数的非线性拟合

我们采用 origin 软件进行材料参数的非线性拟合,在拟合之前,首先将压缩位移用试件的半径 R 进行无量纲化,得到如图 12 的力-位移关系(试件 3)。在该软件中的 Nonlinear Curve Fit 功能下以公式(11)建立一个新的函数,其中 E 、 ν 设为参数(Parameters),参数变化范围: $0.2 \leq E \leq 0.5$, $0.4 \leq \nu \leq 0.5$ 。

在具体拟合过程中,根据拟合优度 Adj. R-Square 的变化,我们发现存在最佳的加载区间,即加载位移 $0 \sim 3\text{mm}$ (无量纲位移的区间: $0 \sim 0.1$),当位移太大时,基于弹性力学小变形假设的 Hertz 接触理论将不严格成立。将拟合结果

中 $\text{Adj. R-Square} \geq 0.998$ 的9组弹性模量和泊松比分别取平均值,得 $E=0.31\text{MPa}$, $\nu=0.47$ 。该结果在轴向压缩试验得到的弹性模量($0.31 \sim 0.36\text{MPa}$)和泊松比($0.45 \sim 0.49$)范围内,可以接受。

综上,对侧向压缩力-位移关系进行非线性拟合得到了材料的弹性模量和泊松比,该方法经检验为一种高效且可靠的材料力学参数测量方法。

4 结论

为了克服传统压缩试验的缺点与不足,本文提出了一种仅通过对圆柱体试件侧向加载即可同时测量材料的弹性模量和泊松比的方法。具体地,利用 Hertz 接触理论推导出圆柱体在侧向压缩时的位移-力关系公式,并对侧压试验得到的位移-荷载结果用该公式进行非线性拟合。本文以圆柱体硅胶为例进行准静态轴向压缩试验和侧向压缩试验,两种试验结果得到的材料弹性模量和泊松比较为一致,验证了本文理论推导公式的正确性和该方法的可行性。特别地,因弹性模量较小的软物质在加载过程所受荷载常常较小,系统测量的位移可以代表试件的变形位移,故本文提出的新测量方法特别适合应用于该类型材料的测量。本文目前仅验证了一种材料和尺寸的有效性,后续将进行更大范围的试件尺寸及材料参数(如弹性模量)的有效性验证,为不同性质材料推荐最优的试件尺寸。

参考文献:

- [1] Scheibert J, Prevost A, Debrgeas G, et al. Stress field at a sliding frictional contact: Experiments and calculations [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2009, 57(12):1921—1933.
- [2] 蒋锐, 胡小方, 许晓慧, 等. 纳米压痕法研究 PZT 压电薄膜的力学性能[J]. *实验力学*, 2007, 22(6):575—580 (JIANG Rui, HU Xiaofang, XU Xiaohui, et al. Study of mechanical properties of PZT piezoelectric film by nano-indentation technique[J]. *Journal of Experimental Mechanics*, 2007, 22(6):575—580 (in Chinese))
- [3] 苏飞, 张铮, 熊吉, 等. 电镀铜薄膜力学性能的实验研究[J]. *实验力学*, 2012, 27(5):565—569 (SU Fei, ZHANG Zheng, XIONG Ji, et al. Experimental study of mechanical properties for electroplated copper film[J]. *Journal of Experimental Mechanics*, 2012, 27(5):565—569 (in Chinese))
- [4] 彭先洪, 郝松林. 影像云纹法测量材料泊松比的实验研究[J]. *实验力学*, 1992, 7(2):202—207 (PENG Xianhong, HAO Songlin. Measurement of Poisson's ratio of nonmetal materials by shadow moire method[J]. *Journal of Experimental Mechanics*, 1992, 7(2):202—207 (in Chinese))
- [5] 谭晓华, 仇巍, 李晓雷, 等. 软材料接触力学问题的实验研究[J]. *实验力学*, 2010, 25(5):509—515 (TAN Xiaohua, QIU Wei, LI Xiaolei, et al. Experimental analysis of mechanics problem within soft material contact field in large deformation[J]. *Journal of Experimental Mechanics*, 2010, 25(5):509—515 (in Chinese))
- [6] 单桂芳, 杨伟, 冯建民, 等. 材料泊松比测试方法的研究进展[J]. *材料导报*, 2006(3):15—20 (SHAN Guifang, YANG Wei, FENG Jianmin, et al. Advances in test methods for Poisson's ratio of materials[J]. *Material Review*, 2006(3):15—20 (in Chinese))
- [7] 陈新忠, 曹远威, 刘世伟, 等. 基于数字图像的非接触式泊松比测试方法[J]. *煤炭学报*, 2014, 39(S2):366—371 (CHEN Xinzong, CAO Yuanwei, LIU Shiwei, et al. Non-contact testing method for Poisson ratio based on digital image[J]. *Journal of China Coal Society*, 2014, 39(S2):366—371 (in Chinese))
- [8] 瞿启云, 曹爱民, 焦平, 等. 基于三维数字图像相关法测量复合材料泊松比[J]. *材料科学与工程学报*, 2018, 36(2):258—262 (QU Qiyun, CAO Aimin, JIAO Ping, et al. Measurement of Poisson ratio of composite materials based on tridimensional digital-image relativity method[J]. *Journal of Materials Science & Engineering*, 2018, 36(2):258—262 (in Chinese))
- [9] 申志彬, 邓斌, 潘兵. 推进剂粘弹性泊松比测试的数字图像相关方法[J]. *固体火箭技术*, 2016, 39(4):513—518 (SHEN Zhibin, DENG Bin, PAN Bing. Digital image correlation method for measuring viscoelastic Poisson's ratio of propellant[J]. *Journal of Solid Rocket Technology*, 2016, 39(4):513—518 (in Chinese))
- [10] 潘兵. 数字图像相关方法及其在实验力学中的应用[D]. 清华大学, 2007:4—7 (PAN Bing. Research on digital image correlation with its application in experimental mechanics[D]. Tsinghua University, 2007:4—7 (in Chinese))
- [11] Timoshenko S P, Goodier J N. 弹性理论(第3版)[M]. 北京:清华大学出版社, 2004:398—418 (Timoshenko S

P, Goodier J N. Theory of elasticity (3rd ed) [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004: 398 — 418 (in Chinese))

A new method for simultaneous measurement of elastic modulus and Poisson's Ratio by using force-displacement relationship of a cylinder under lateral compression

ZHANG Yu-ting, DING Rong, ZUO Ze-yu, TANG Li-qun,

LIU Yi-ping, JIANG Zhen-yu, LIU Ze-jia, ZHOU Li-cheng

(School of Civil Engineering and Transportation, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

Abstract: Young's modulus and Poisson's ratio are significant mechanical parameters to characterize the properties of the materials. However, the simultaneous measurement of them is not easy in the traditional compression experiments as the pressure, the displacements and the lateral deformation are all needed to be gauged at the same time. In this work, the formula of the displacement-force relationship under the lateral compression is deduced based on the Hertz contact theory. The relationship is determined by the geometric parameters of the materials as well as the Young's modulus and the Poisson's ratio. Therefore, the Young's modulus and the Poisson's ratio can be obtained by nonlinear fitting of the force-displacement relationship measured under lateral compression. The feasibility of the method is verified by comparing the measurements in the axial and the lateral compression tests of silica gel materials, which are in good agreement. As for the soft materials with lower elastic modulus, the load is often smaller in the loading process, so it is rational to substitute the displacement obtained from the testing machine for the actual displacement of the specimen, which makes the new method especially suitable for related mechanical properties measurement of this type of materials.

Keywords: lateral compression; force-displacement relationship; Young's modulus; Poisson's ratio