

文章编号: 1001-4888(2023)05-0573-12

## 基于 $G^2$ 值法的二维光弹颗粒体系力链研究\*

郭战伟<sup>1</sup>, 陈凡秀<sup>1</sup>, 王远<sup>1</sup>, 刘雨欣<sup>1</sup>, 孙洁<sup>2</sup>, 钟宜辰<sup>1</sup>

(1. 青岛理工大学 理学院, 山东青岛 266033; 2. 青岛理工大学 土木工程学院, 山东青岛 266033)

**摘要:** 力链是颗粒体系研究中的重要概念, 是微观现象的集中体现, 对宏观颗粒物质体系起着重要作用。采用光弹方法对受竖向荷载作用的混合直径颗粒体系进行加压实验, 结合数字图像处理技术和  $G^2$  值法(彩色梯度均方值算法), 分析了颗粒体系在竖向荷载作用下几何结构的变化以及接触力、力链网络的分布情况。首先通过数字图像处理技术统计出颗粒体系在不同竖向荷载作用下的接触向量角度分布情况, 发现其集中分布区间只是在区间分布频率上出现小幅波动, 竖向荷载的增大并不会对整体分布产生影响。然后通过  $G^2$  值法求出了颗粒体系的  $G^2$  值, 并对单个颗粒的  $G^2$  值和平均接触力  $F$  的关系进行了拟合, 结果表明, 光弹颗粒的  $G^2$  值随着  $F$  的增大而增大, 接触点少的颗粒  $G^2$  值反而偏大。接着通过拟合公式计算出单个颗粒的接触力, 根据其 与平均接触力的比值频率统计结果画出接触力频率分布曲线, 从曲线结果来看, 竖向荷载的增大能够让颗粒体系中直径较小的颗粒接触力更加接近平均接触力, 分布更加统一; 直径较大的颗粒能够支撑起更多的荷载并接触到更多其他的颗粒, 承受更大的接触力。最后根据接触力的分布情况判定出强弱力链并画出力链网络, 结果表明, 竖向荷载的增大在一定范围内会让强力链的分布趋于统一, 强力链上的颗粒排列更加紧凑, 随着荷载不断增大, 强力链上的颗粒数目变少且更易断裂解体成单颗粒分布, 进而加剧颗粒的重排性质。

**关键词:** 颗粒体系; 光弹实验; 接触向量角度; 接触力; 力链

**中图分类号:** TU443

**文献标识码:** A

**DOI:** 10.7520/1001-4888-22-269

### 0 引言

颗粒物质在自然界和人们的日常生活中大量存在, 如自然界中的砂土、矿物质、石块等, 日常生活中的食盐、白糖、粮食作物等。在工业上, 颗粒物质的应用和研制更加广泛, 其应用范围涵盖了建筑业、医药业、食品业等诸多领域。据统计<sup>[1]</sup>, 由于存在颗粒物质的运输不当、资源浪费等问题, 每年都会造成颗粒材料的大量损失和耗费, 且自然灾害中的雪崩、沙尘暴、地震、泥石流等问题也都与颗粒物质紧密联系, 关乎着我国众多人口的生命财产安全。颗粒物质遍布于各领域, 研究其内部的力学特性和行为方式, 对我国经济的长远发展有着重大的意义。

对于受荷载作用的颗粒体系而言, 并不是每个颗粒都均匀受力, 只有部分颗粒承受了大于平均接触力的力, 当这些接触的颗粒连接在一起时, 就构成了强力链<sup>[2]</sup>。孙其诚等<sup>[3]</sup>提出, 除微观的单颗粒尺度和宏观土体尺度外, 起到传递颗粒接触力作用的主要为细观尺度上的力链, 它是位于颗粒体系内部相对稳固的结构。由此来看, 在细观尺度下, 要想对单个颗粒与颗粒体系进行研究, 需要掌握力链的分布和变化规律。目前对于力链的研究仍处于发展阶段<sup>[4-5]</sup>, 而且主要是通过对比现象进行统计和归纳, 得

\* 收稿日期: 2022-10-28; 修回日期: 2022-12-17

基金项目: 国家自然科学基金项目(12072170); 泰山学者工程专项经费资助项目(tsqn202211180)

通信作者: 陈凡秀(1979-), 女, 教授, 博士生导师。主要研究领域: 实验力学。Email: mecfx@163.com

到统计性规律,对其内部机理的研究尚不完善。比如在已知边界条件和颗粒材料性质的情况下,并不能对力链的演变趋势,包括何时形成、如何破坏和重构等信息做出判断,但可以通过判定强弱力链、计算平均配位数、统计接触向量等工作去研究颗粒体系中错综复杂的力链网路,进而通过这些信息归纳出一般性结论。

光弹实验方法<sup>[6-7]</sup>是通过光学理论来反映弹性力学问题的一种实验应力解析手段,该方法可以很直观地表现出颗粒材料间接触力的分布情况。当把能产生暂时双折射效应的材料(如聚碳酸酯材料)置于偏振光场中时,如果再给这种材料施加一定的荷载,就会产生干涉条纹、等差线、等倾线等,进而可以通过这些物理信息表征颗粒间接触力的大小。迄今为止,光弹实验技术约有两百年的历史,Brewster<sup>[8]</sup>在1816年便观察到受应力作用下的玻璃能够产生暂时双折射现象。1957年,Dantu<sup>[9]</sup>将光弹实验技术用在颗粒材料的研究中,并观察到了颗粒间接触力的传播方式。随着数码相机的普及和计算机技术的发展,光弹实验技术在国内外颗粒研究中得到了迅速的发展和应用。Karen等<sup>[10]</sup>利用光弹性颗粒剪切实验研究了地震断层中的力链,发现承载更多荷载的光弹颗粒显得更明亮,结果形成的是分支状、向剪切带边界倾斜的各向异性力链网络。杨荣伟等<sup>[11]</sup>利用自行设计的光弹直剪仪器装置进行颗粒体系的直剪试验,发现颗粒材料具有初始各向异性的力学特点,在直剪作用下,不仅几何结构发生了变化,而且直剪作用还加剧了其各向异性的行为,力链最终呈局部化分布。郑虎<sup>[12]</sup>利用自行研制的等体积无摩擦的优化光弹实验直剪装置,通过直剪试验观测到了颗粒材料在剪切变形过程中细观尺度上的力链分布,并对试验过程中位移场和主应力方向的发展规律进行了分析。李飞等<sup>[13]</sup>应用课题组研发的新型颗粒光弹试验装置,对圆形和方形2种混合颗粒进行了光弹力链的提取和研究,并通过煤矿综放开采工程实例对试验提出的力链定量提取方法进行了验证,直观地揭示了综放采面矿压的形成机理和本质特征。Zheng等<sup>[14]</sup>应用光弹实验技术研究软约束边界下的光弹性颗粒系统中力链网络的发展规律,发现颗粒系统在膨胀之前就达到了阻塞状态,在剪切带区域,位移和旋转场具有很强的相关性。陈福星等<sup>[15]</sup>通过对光弹颗粒的应力光图进行分析和研究,并结合数字图像处理方法,提出了线扫描加载点到圆心区域来测接触力的方法。Acar等<sup>[16]</sup>通过驱动不同速度的钟摆去撞击均匀排列的光弹颗粒,研究了介质内颗粒和力链的运动,发现垂直方向上的颗粒最大速度相同,水平方向上的最大速度随着摆速的增加而增高,同时还观察到了高速冲击下二维力链的演变。康毅力等<sup>[17]</sup>选用5种形状的聚碳酸酯颗粒,通过光弹实验方法模拟压力波动情况,探究了颗粒形状在裂缝封堵层细观结构稳定性方面的影响。

由于光弹技术应用起来简单方便、直观可见,因此现阶段对该技术的研究多用于开展工程模型的定性分析,而对于实验中亟需分析的问题例如不同荷载、颗粒直径、空间分布条件下的颗粒接触力与力链分布及其变化规律等机理尚有待于进一步深入研究。基于此,本文通过数码光弹仪对颗粒材料进行竖向加载实验,结合数字图像处理技术,探究了不同竖向荷载下的颗粒体系接触力分布和力链结构的演变情况,本文研究方法和数据结果可为光弹实验技术的发展及颗粒体系实际工程问题的研究提供参考。

## 1 光弹实验

### 1.1 实验基本原理

把具有光弹性效应的模型置于偏振光场中,若模型受力,将产生暂时的双折射现象,即经过起偏镜形成的偏振光沿着2个主应力方向分解成2束互相垂直的偏振光,穿过模型后,这2束偏振光将产生相位差 $\Phi$ ,其值为

$$\Phi = \frac{2\pi Ch(\sigma_1 - \sigma_2)}{\lambda} \quad (1)$$

式中: $C$ 为光学材料常数; $h$ 为模型厚度; $\lambda$ 为光波长; $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 为2个主应力分量。

### 1.2 实验光场

实验的光路图为正交圆偏振光场,光源在穿过起偏镜、1/4波片、光弹模型、检偏镜之后产生的2束偏振光会在同一平面内振动,发生干涉形成干涉条纹,实验光源为白光,因此数码相机最后采集到的是彩色条纹,如图1所示。干涉条纹的光强值 $I$ 为

$$I = K \left[ a \sin \frac{\pi Ch (\sigma_1 - \sigma_2)}{\lambda} \right]^2 \quad (2)$$

式中： $K$  为常数； $a$  为光波振幅，其他各参数含义同公式(1)。

通过对光强  $I$  的梯度进行计算处理，就可以得出光弹模型的  $G^2$  值，从而通过拟合公式反推出光弹模型所受应力的分布大小。

### 1.3 实验装置及材料

实验选用卓力特光电仪器(苏州)有限公司生产的微型数码光弹仪，光弹仪通过手动拧动拉压螺旋杆对实验模型产生竖向荷载，拉压螺旋杆转数  $t$  与下压距离  $y$  的比例关系为  $y = 2t$ 。

本文实验采用白光光源，为了使光照均匀且易于观察，用一层白纸包住 LED 灯光形成面光源，相机为 NIKON D90 型号专业数码相机，拍摄焦距为 105mm，图像分辨率为  $4288\text{pixel} \times 2848\text{pixel}$ ，实验系统如图 2 所示。实验盒为有机玻璃材质，具有较好的透明性，受力不会在偏振光场中产生光学效应，此项特性将有助于颗粒条纹的提取。



图 1 竖向对径荷载下光弹模型彩色条纹图  
Fig.1 Color stripe diagram of the photoelastic model under vertical opposite radial load

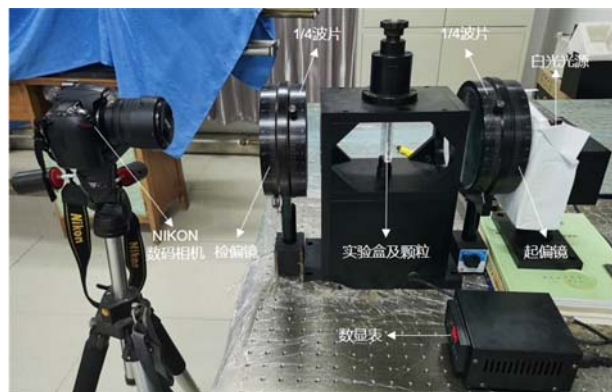


图 2 实验系统  
Fig.2 Experimental system

实验材料是由 PC 耐力板(聚碳酸酯)激光切割而成的直径不同、厚度相同的 2 种圆盘颗粒，该材料具有高透明度、高机械强度、抗冲击等优势，且易于加工成型而不破碎，2 种圆盘颗粒的尺寸为：直径分别为 8mm、9mm，厚度均为 3mm，聚碳酸酯颗粒如图 3 所示，其密度为  $1.20\text{g}/\text{cm}^3$ ，泊松比为 0.35，压缩弹性模量为  $2200\text{MPa}$ 。实验中加载压头通过机床加工而成，底部长宽高为  $35\text{mm} \times 3\text{mm} \times 3\text{mm}$ ，实验压头如图 4 所示，压头可以覆盖整个实验盒中的颗粒顶部平面，并对颗粒体系产生面内竖向荷载。



图 3 聚碳酸酯颗粒  
Fig.3 Polycarbonate particles



图 4 实验压头  
Fig.4 Experimental pressure head

### 1.4 实验方法及过程

材料加工过程中会产生残余应力，因此在实验之前先通过退火实验消除了加工应力。将直径

8mm、9mm的圆盘颗粒按约为3:2数量比例随机加入实验盒,其中8mm颗粒24个,9mm颗粒16个。

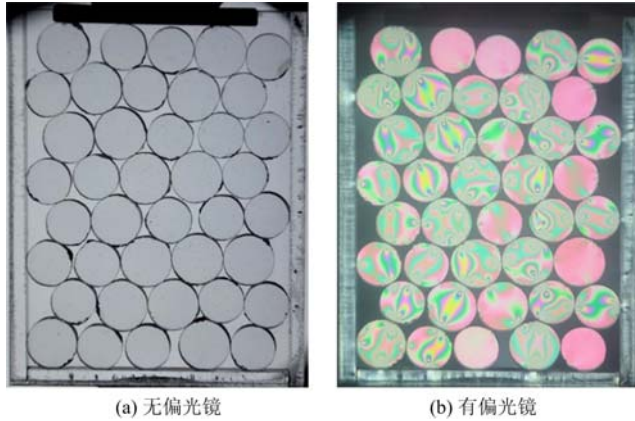


图5 实验采集的图片

Fig. 5 Experimental images

将填满颗粒的实验盒固定在光弹仪装置中,手动拧动拉压螺旋杆,调整实验盒和压头之间的位置和间距,使颗粒顶部平面和压头充分接触并在同一竖直面上,保证颗粒受力均匀,数显表上的压力示数要显示为0(无压力)。安装数码相机,与检偏镜保持一定的间距,完成焦距、曝光时间调节等工作。

继续轻轻拧动拉压螺旋杆,使数显表上的压力示数依次显示为1N、10N、20N、30N,每个荷载下都拍摄2幅图片,一幅是无偏光镜下的每个颗粒位置和颗粒间接触关系图像(图5(a)),另一幅是

有偏光镜下能获取每个颗粒的平均接触力、统计力链分布方位角及力链强度的光弹图像(图5(b))。

### 1.5 基于彩色梯度均方值算法的接触力计算

灰度梯度均方值法<sup>[18]</sup>是目前光弹应力分析中应用最广泛的方法,该方法不依据颗粒内部条纹级数的具体分布,而是重点考虑单个颗粒内部光强梯度。对于由较多颗粒构成的体系,只需要精确定位每个颗粒位置并计算每个像素点的光强,即可以处理颗粒体系接触力问题。彩色梯度均方值法<sup>[13]</sup>由灰度梯度均方值法发展而来,适用于白光条件下形成的彩色条纹识别处理,该方法的核心是定义了一个梯度均方值概念,即对于灰度图来说,其每一个像素点 $(i, j)$ 都对应1个灰度值 $I_{i,j}$ ,取值范围从0到255,亮度从深到浅,0表示黑色,255表示白色。每个像素点的灰度值与周围8个像素点的灰度值梯度便构成了该点梯度均方值 $|\nabla I_{i,j}|^2$ ,对单个颗粒所包含的全部像素点的 $|\nabla I_{i,j}|^2$ 进行累加,求出平均值,即为实验中单个颗粒的灰度梯度均方值 $G^2$ ,计算示意图如图6所示<sup>[16]</sup>, $|\nabla I_{i,j}|^2$ 的计算见式(3)。

$$|\nabla I_{i,j}|^2 = \left[ \left( \frac{I_{i-1,j} - I_{i+1,j}}{2} \right)^2 + \left( \frac{I_{i,j-1} - I_{i,j+1}}{2} \right)^2 + \left( \frac{I_{i-1,j+1} - I_{i+1,j-1}}{2\sqrt{2}} \right)^2 + \left( \frac{I_{i+1,j-1} - I_{i-1,j+1}}{2\sqrt{2}} \right)^2 \right] / 4 \quad (3)$$

$$G^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |\nabla I_{i,j}|^2 \quad (4)$$

式中, $N^2$ 为不包含边界的颗粒内部像素点数目。

按灰度梯度均方值的分析方法进行扩展,对于一幅RGB彩色图像来说,其中的每个像素点都由 $R(m, n)$ 、 $G(m, n)$ 、 $B(m, n)$ 3个变量值组成,对应于红、绿、蓝3个分量,每个取值范围都是从0到255,亮度也是由深至浅,它们共同构成了三维RGB彩色立方体空间。用 $\mathbf{V}$ 表示其中的任意向量,则有

$$\mathbf{V}(m, n) = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_R(m, n) \\ \mathbf{V}_G(m, n) \\ \mathbf{V}_B(m, n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(m, n) \\ G(m, n) \\ B(m, n) \end{bmatrix} \quad (5)$$

依次将每个分量代入式(4),可以求出 $|\nabla R_{m,n}|^2$ 、 $|\nabla G_{m,n}|^2$ 、 $|\nabla B_{m,n}|^2$ ,再将这3个值进行相加,就得出彩色图像的 $|\nabla V_{m,n}|^2$ ,其值为

$$|\nabla V_{m,n}|^2 = |\nabla R_{m,n}|^2 + |\nabla G_{m,n}|^2 + |\nabla B_{m,n}|^2 \quad (6)$$

计算单个颗粒的 $G^2$ 值,与处理灰度图的方法一样,把单个颗粒中包含的所有像素点代入式(5)即可

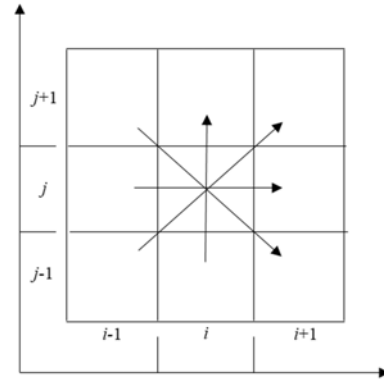


图6  $G^2$ 计算示意图

Fig. 6 Schematic plot for principle of  $G^2$

求出每个颗粒的  $G^2$  值。

### 1.6 $G^2$ - $F$ (平均接触力) 拟合曲线

为了获得每个颗粒受力的大小,任意选取 1 个 8mm 或者 9mm 的颗粒进行标定实验<sup>[19]</sup>,即在逐级加载下记录所有时刻的加载力对应的  $G^2$  值大小,拟合得到两者的关系曲线,如图 7 所示。从曲线图拟合结果来看,光弹颗粒的  $G^2$  值随着  $F$  的增大而增大,且接触点的个数对  $G^2$  值也有影响,接触点少的颗粒  $G^2$  值反而偏大。对其关系进行三次回归拟合可以得出:

$$8\text{mm 颗粒: } 4 \text{ 个接触点: } \langle G^2 \rangle = 0.0000018 F^3 - 0.0003 F^2 + 0.0091 F + 0.0142 \quad (7)$$

$$5 \text{ 个接触点: } \langle G^2 \rangle = 0.0000024 F^3 - 0.00015 F^2 + 0.0031 F + 0.0258 \quad (8)$$

$$9\text{mm 颗粒: } 4 \text{ 个接触点: } \langle G^2 \rangle = 0.000007 F^3 - 0.00045 F^2 + 0.0102 F + 0.021 \quad (9)$$

$$5 \text{ 个接触点: } \langle G^2 \rangle = -0.0000019 F^3 + 0.000097 F^2 + 0.00042 F + 0.0249 \quad (10)$$

由式(7)~(10)可知,当知道单个颗粒的  $G^2$  值和接触点个数时,就可以代入公式求出其对应的颗粒接触力。

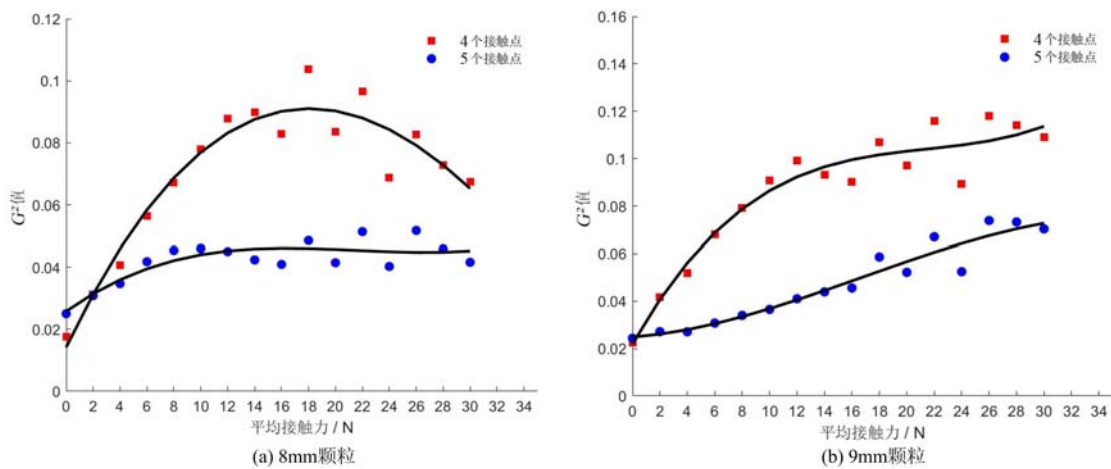


图 7 光弹颗粒  $G^2$  - $F$  关系曲线图

Fig. 7  $G^2$  - $F$  relation diagrams of photoelastic particle

## 2 图像处理和结果分析

### 2.1 颗粒分布信息提取

将实验中拍摄的无偏光镜下的图像借助 Matlab 软件进行处理,通过对颗粒位置和接触信息进行提取并数字化,可以实现接触网络的直观呈现,从而获得颗粒以及颗粒间接触的基本信息。

根据形态学操作原理<sup>[20]</sup>,对图 8(a)无偏光镜图像的处理包含了边缘提取、二值化处理、腐蚀膨胀 3 个处理过程,即首先将 RGB 彩色图像转换为灰度图,并采用 Matlab 中的“sobel”命令提取图像边缘,如图 8(b)所示;接着选取合适的阈值对图片进行二值化处理,该过程可以获得暗背景上分布的亮斑,每个

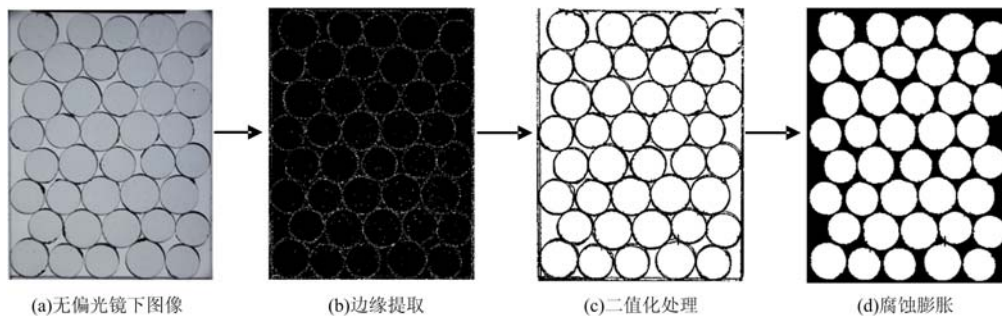


图 8 图像处理过程

Fig. 8 Image processing process

亮斑表征 1 个颗粒或孔隙,由于受光线条件的影响,选取合适的阈值是图像处理的关键,既要保证单个颗粒识别完整,又需要所有颗粒在背景中都可以呈现出来,经过多次调试,最终确定阈值为 0.015,在该数值下,所有颗粒边缘都能和背景分离开来,得到的二值化图像如图 8(c)所示;最后对图像进行腐蚀膨胀,对产生的小孔隙和颗粒间的缝隙进行填充操作,使颗粒变小且互相分离,边界上不完整的颗粒予以剔除,如图 8(d)所示。

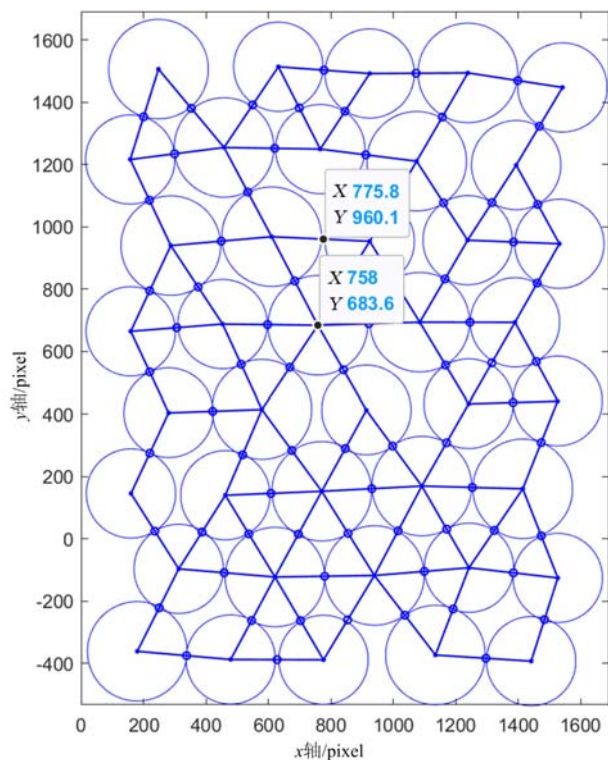


图 9 颗粒分布信息提取结果

Fig. 9 Extraction results of particle distribution information

中几何结构的变化。根据接触向量的定义<sup>[21-22]</sup>,接触向量角度示意图如图 10 所示,通过统计接触颗粒间的夹角,可获取 1N、10N、20N、30N 竖向荷载状态下的接触向量频率方向分布图,如图 11 所示。

由于同一接触点的接触向量具有对称性,如图 10 中的  $n_a$ 、 $n_b$  所示,上下 2 个半区的结果完全一致,所以选取  $0^\circ \sim 180^\circ$  进行分析即可。对接触颗粒间的向量角度按每  $18^\circ$  为一个区间范围进行统计,得出了 4 个加载状态下的接触向量频率分布,接触向量频率方向分布如图 11 所示。从分布图的结果来看,每个加载时刻都存在相对集中的接触向量角度分布区间,且在  $36^\circ \sim 90^\circ$ 、 $164^\circ \sim 180^\circ$  范围内的频率较高,说明颗粒材料在这些区间内具有一定的方向性。在竖向荷载很小的时刻,颗粒材料的几何结构就表现出各向异性,如图 11(a)所示,这和土颗粒的固有特性类似,受物理参数的影响,具有初始各向异性。在其他加载时刻,如图 11(b)、(c)、(d)所示,接触向量角度分布区间整体上并没有很大的变化,只是在区间分布频率上出现小幅度的波动。这是由于封闭实验盒中的颗粒体系密实性较好,在受到一个方向上的力时,内部的颗粒只会出现该方向上的位移,并不会发生其他方向上的位移或转动,也因此使颗粒的各向异性行为几乎不会受到影响。

### 2.3 颗粒接触力分布和强力链分析

通过获取每个受压颗粒的  $G^2$  值,可以计算得到每个颗粒的接触力。将实验中拍摄的光弹彩色图片

圆心坐标采用标定算法获取,颗粒直径通过实际尺寸与像素尺寸的比例换算得出,再结合圆形颗粒的对称性质,就可以确定二维平面内每个颗粒的具体位置。关于 2 个颗粒是否接触的判定,采用的判定方法是,任意 2 个颗粒圆心的距离不超过其半径之和,即

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \leq \Delta + (r_1 + r_2) \quad (11)$$

式中:  $(x_1, y_1)$ 、 $(x_2, y_2)$ 、 $r_1$ 、 $r_2$  分别为任意 2 个颗粒的圆心坐标和半径;  $\Delta$  为误差参数(放大系数),该数值是为了避免颗粒变形、相机精度等因素的影响而设定的,根据实验精度,在对比实验采集的原图和最终呈现出的颗粒接触网络图之后,本文的  $\Delta$  取值为 14.5 pixel,约为 0.7 mm,此条件可以保证识别出来的接触颗粒和实际接触的颗粒效果一致。综合颗粒体系几何信息的获取方法,无偏光镜下的颗粒分布信息提取结果如图 9 所示。

### 2.2 接触向量角度分析

通过统计任意 2 个接触颗粒间向量角度的分布,可以直观地展示出材料在加压过程

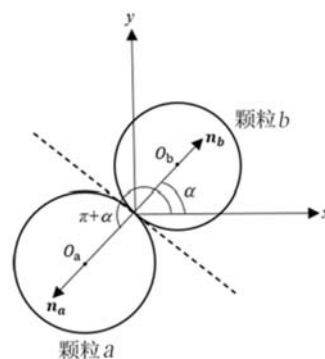


图 10 接触向量角度示意图

Fig. 10 Schematic of contact vector angle

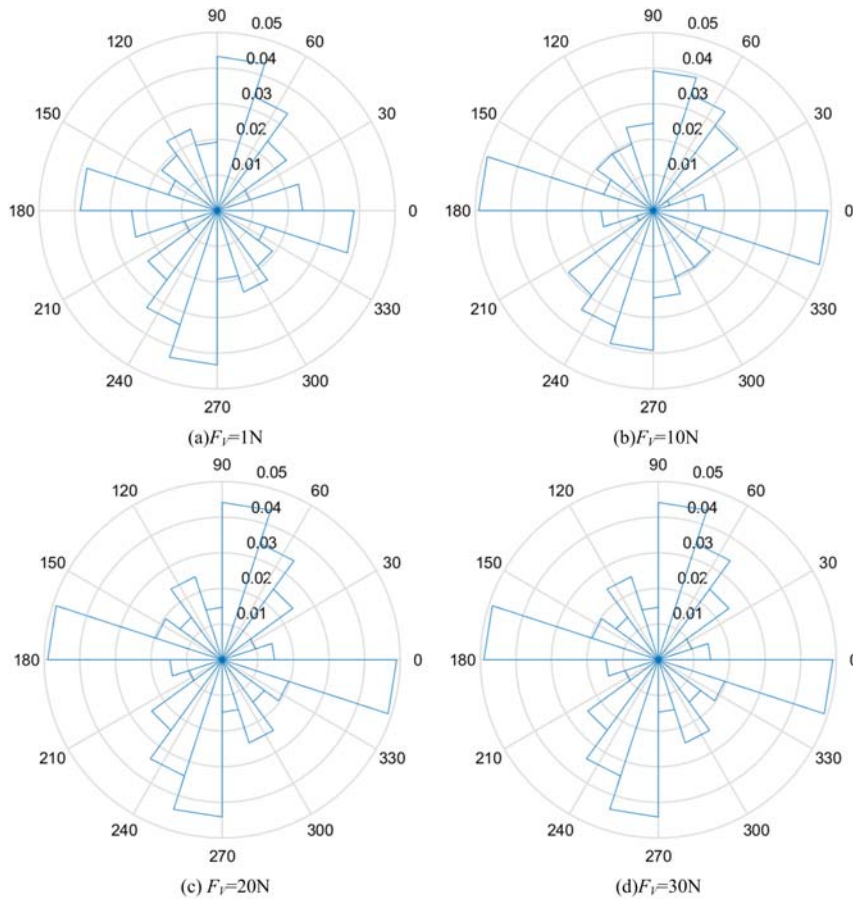


图 11 接触向量频率方向分布图

Fig. 11 Distribution of contact vector frequency direction

用彩色梯度均方值法进行处理,便可以求出所有颗粒的  $G^2$  值,颗粒灰度梯度图如图 12 所示,光弹彩色图像转换成的灰度梯度图,亮度较高的地方所计算出的  $G^2$  值较大,受力也较大,这些干涉条纹主要分布在接触点和颗粒边缘区域,这表明荷载作用下颗粒接触位置处产生了应力集中现象。

由  $G^2$  值计算得出每个颗粒的接触力,求出平均接触力,见表 1,在任意加载时刻,8mm 颗粒和 9mm 颗粒的平均接触力约为 2 倍的关系,随着加载力的增大,两者的平均接触力都是先增大后减小,相比较而言,9mm 颗粒变化更明显。根据单个颗粒的接触力与平均接触力的比值频率统计结果画出接触力频率分布曲线,通过接触力频率分布曲线可以更直观地观察每个颗粒接触力的分布情况,如图 13 所示。

表 1 颗粒平均接触力  $\bar{F}$

Tab. 1 Average contact force  $\bar{F}$  of particles

竖向荷载 $F_v/N$	1	10	20	30
8mm 颗粒 $\bar{F}/N$	4.51	24.62	30.63	30.31
9mm 颗粒 $\bar{F}/N$	1.35	14.29	19.68	15.37

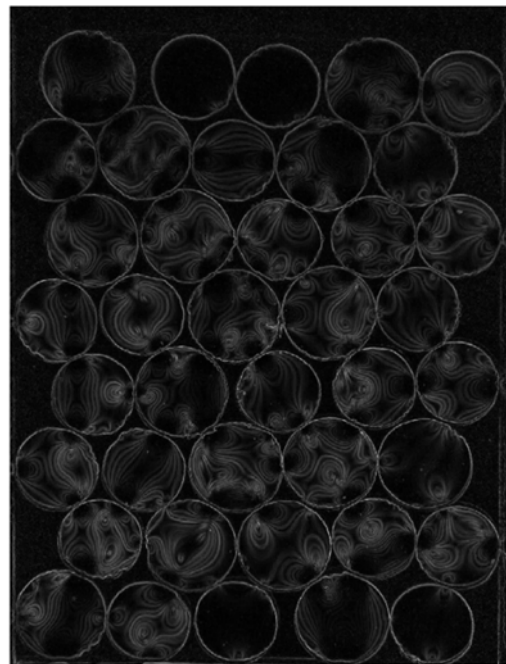


图 12 颗粒灰度梯度图

Fig. 12 Gray gradient map of particles

由图 13 接触力频率分布曲线 4 幅图可知(图中  $F/\bar{F}$  代表颗粒接触力与平均接触力的比值关系,  $P(F/\bar{F})$  代表比值出现的频率):当加载力为 1N 时,荷载较小,频率峰值点颗粒对应的接触力约为 1 倍的平均接触力,两者较接近,随着加载力的增大,8mm 颗粒接触力频率峰值点对应的接触力都比平均接触力大,如图 13(a)所示。加载力为 10N 时,峰值处颗粒的接触力约为 1.5 倍的平均接触力,当倍数为 1.8 时,频率值接近于 0,表明超过此接触力的最大受力颗粒点不存在,如图 13(b)所示。随着加载力的继续增大,在 20N、30N 时,接触力频率峰值点对应的接触力变成了 1.1 倍的平均接触力,最大受力颗粒点为 1.5 倍的平均接触力,荷载的增大让 8mm 颗粒的接触力更加接近平均接触力,分布也更加统一,如图 13(c)、(d)所示。对于 9mm 颗粒,加载力为 10N、30N 时,最大受力颗粒点达到了 2 倍多的平均接触力,20N 时的接触力频率峰值点对应的接触力也要比 8mm 颗粒的大很多,约为 1.6 倍的平均接触力,这表明部分 9mm 颗粒能够支撑起更多的荷载并接触到更多的颗粒,并承受更大的接触力。

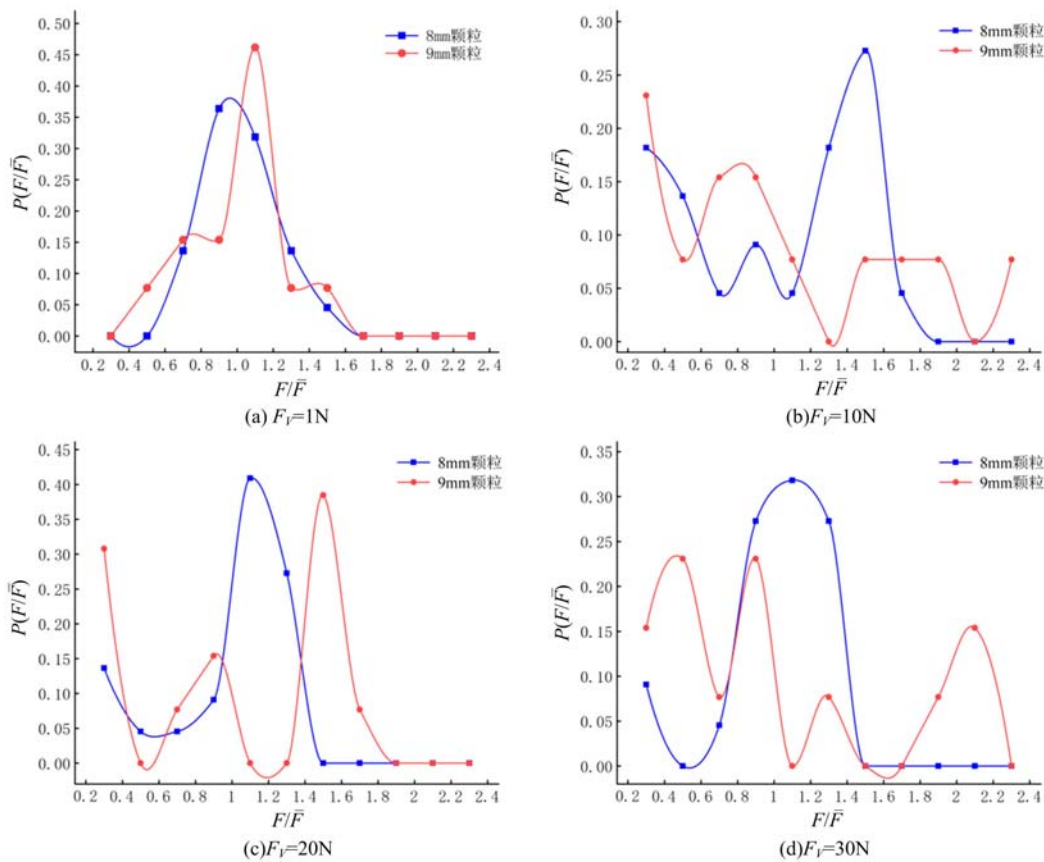


图 13 接触力频率分布曲线图

Fig. 13 Frequency distribution of contact force

根据颗粒体系的接触力分布情况并结合强力链的定义,可以认为,当单个颗粒的接触力  $F$  大于平均接触力  $\bar{F}$  ( $G^2 > \bar{G}^2$ ) 时,则此颗粒位于强力链上。根据这一准则,通过数字图像处理提取出各加载时刻的强力链,如图 14 所示。将强力链在原始图像上用较粗的箭头连接起来,其他受力小于平均接触力的颗粒用较细的箭头连接,表示弱力链,未连接的颗粒表示受力大于平均接触力但不与强力链上的其他颗粒接触的单个颗粒,如图 15 所示。

强力链可以用来表征颗粒体系中受力较大的颗粒分布情况,这些颗粒承担了整个颗粒体系中的大部分重量及外荷载。如图 15 所示(较粗箭头所连接的颗粒),在每个加载时刻,位于强力链上的颗粒都有着条纹明亮且级数高的特征。在初始加载时刻( $F_v = 1N$ ),由于此时荷载比较小,从图 14(a)和图 15(a)可以看出,位于强力链上的颗粒分布还比较散乱,颗粒体系右下角的强力链呈拱形分布,其他位置的力链零散分布,单颗粒分布和 2 个颗粒接触的短力链存在较多,力链连通性较差。随着荷载继续增大,图 14(b)、(c)中强力链的分布开始变得统一起来,强力链呈树状分布且相互贯通,中部颗粒由于受到上



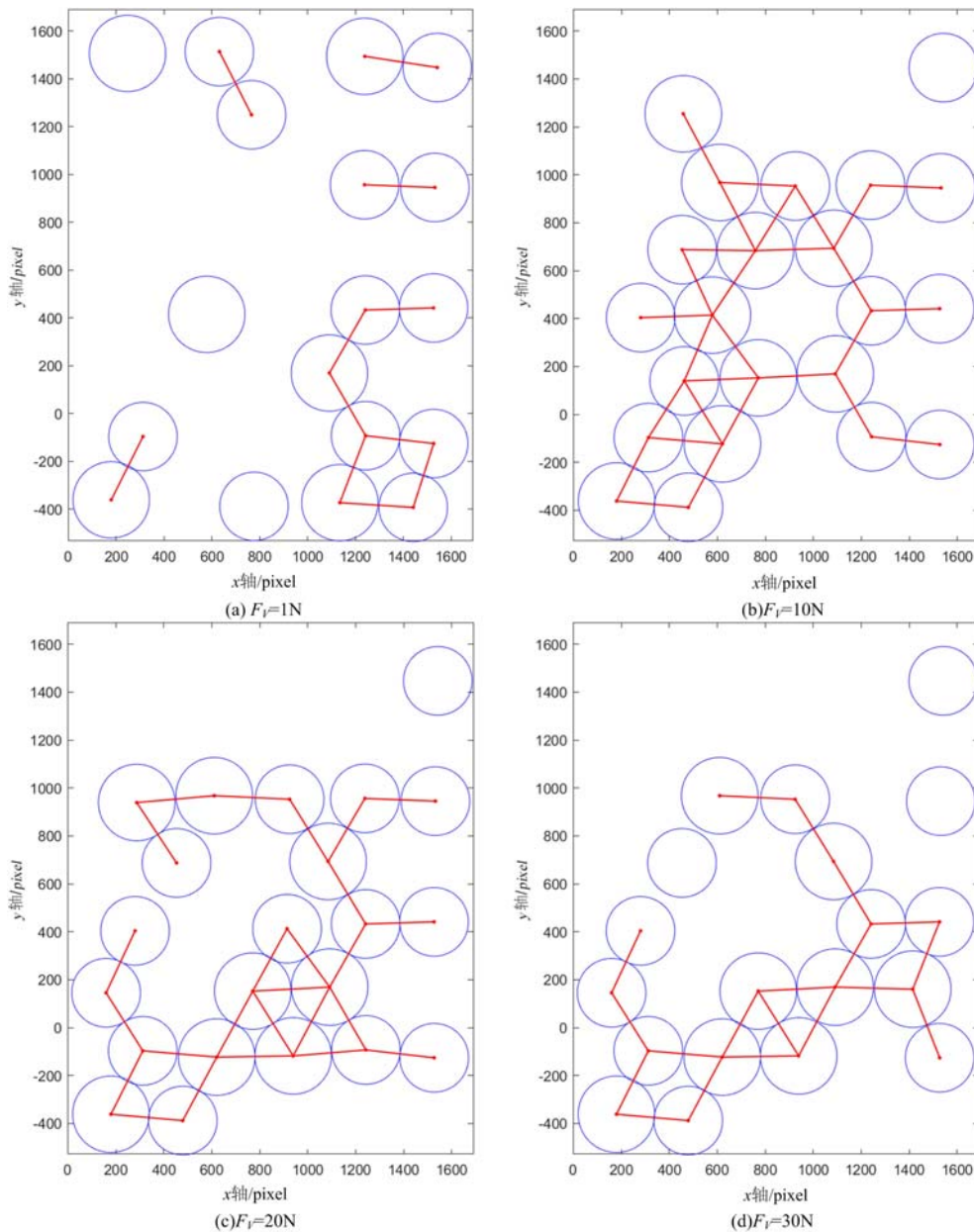


图 14 各加载时刻强力链分布

Fig. 14 Distribution of strong force chain at each loading moment

部荷载的影响,开始相互接触且受力增大,力链由上部向左右两侧延伸,最终传递至底部颗粒,单颗粒分布几乎不存在,力链趋于稳定且连通性也变得更好,同时图 15(b)、(c)中位于强力链上的颗粒条纹显得更加明亮并增多。当荷载增大至最大加载时刻 ( $F_v = 30N$ ),由图 14(d)和图 15(d)可知,此时颗粒开始重新排列,强力链又变为拱形分布并且强力链上的颗粒数目相较于前 2 个时刻变少了,中底部区域的颗粒承受了更大的接触力,上部区域仅存几个受力大于平均接触力的单颗粒和一小部分强力链上的其他颗粒。这主要是由于荷载的增大使得上部区域的颗粒相对于整个颗粒体系而言,接触力的变化不那么明显了,而中底部区域的颗粒,由于受到其他各个方位颗粒的挤压作用,接触力变化更大,从而呈现集中分布。综上所述,在竖向加载力很小的情况下,强力链上的颗粒也保持着各向异性分布特征。竖向加载力的增大在一定范围内会让强力链的分布趋于统一,强力链上的颗粒排列更加紧凑,随着荷载的持续增大,强力链更易因扰动发生断裂解体成单颗粒分布,从而导致颗粒重新排布。

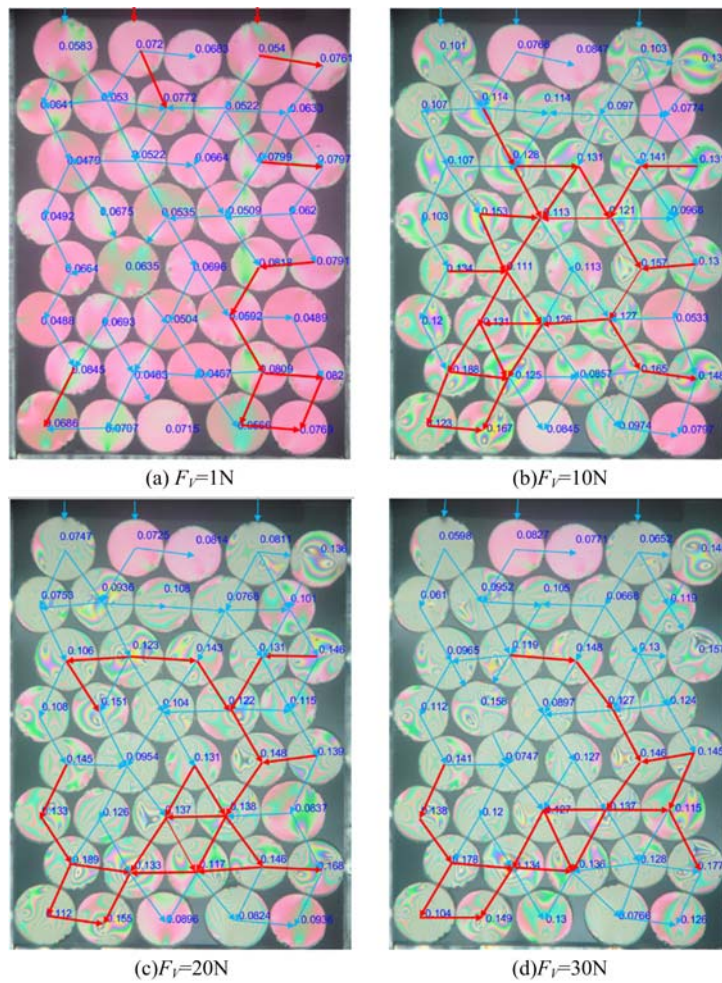


图15 各加载时刻力链网络分布

Fig. 15 Distribution of force chain network at each loading moment

### 3 结论

(1) 通过  $G^2$ - $F$  标定实验可以得知,不同粒径的光弹颗粒  $G^2$  值随着  $F$  的增大而增大,且接触点的个数对  $G^2$  值也有影响,接触点少的颗粒  $G^2$  值反而偏大。

(2) 对于封闭实验盒中的颗粒体系,由于受到物理参数的影响,会出现初始各向异性现象。由于颗粒较密实,竖向荷载对其接触向量角度分布区间的影响并不是很大,只是在区间分布频率上表现出小范围的波动。

(3) 由光弹彩色图像转换成的灰度梯度图中亮度较高的地方主要分布在接触点和颗粒边缘区域,表明颗粒在受压过程中,颗粒接触点位置处产生了应力集中现象。由接触力频率分布曲线可知,随着荷载增大,8mm 颗粒接触力更接近平均接触力,且整体分布更加统一;9mm 颗粒承载能力更好,且颗粒接触数量更多。

(4) 竖向加载力的增大在一定范围内会让强力链的分布趋于统一,使强力链上的颗粒排列更加紧凑,随着荷载的持续增大,力链更易解体形成单颗粒分布情况,进而加快颗粒的重排性。

#### 参考文献:

- [1] 贾鲁强. 漫谈颗粒体物理[J]. 物理双月刊, 2001, 23(4):1-9 (JIA Luqiang. Rambling about granular body physics[J]. Bimonthly Physics Journal, 2001, 23(4):1-9 (in Chinese))
- [2] Hill J M, Selvadurai A P S. Mathematics and mechanics of granular materials[J]. Journal of Engineering

- Mathematics, 2005, 52:1–9.
- [3] 孙其诚, 金峰. 颗粒物质的多尺度结构及其研究框架[J]. 物理, 2009, 38(4):225–231 (SUN Qicheng, JIN Feng. The multiscale structure of granular matter and its mechanics[J]. Physics, 2009, 38(4):225–231 (in Chinese))
- [4] Kang G, Ning Y, Liu R, et al. Simulation of force chains and particle breakage of granular material by numerical manifold method[J]. Powder Technology, 2021, 390:464–472.
- [5] 张炜, 萧伟健, 袁传牛, 等. 离散元法铁粉末压制中粒径分布对力链演化机制的影响[J]. 力学学报, 2022, 54(9):2489–2500 (ZHANG Wei, XIAO Weijian, YUAN Chuanniu, et al. Effect of particle size distribution on force chain evolution mechanism in iron powder compaction by discrete element method[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2022, 54(9):2489–2500 (in Chinese))
- [6] 岳中文, 王煦, 杨仁树, 等. 一种动光弹模型材料的制作方法及其应用[J]. 实验力学, 2017, 32(2):179–188 (YUE Zhongwen, WANG Xu, YANG Renshu, et al. A method of dynamic photoelastic experimental model material and its application[J]. Journal of Experimental Mechanics, 2017, 32(2):179–188 (in Chinese))
- [7] 黄晓宇, 邓华夏, 管擎天, 等. 单像素成像的数字光弹研究[J]. 实验力学, 2022, 37(1):9–17 (HUANG Xiaoyu, DENG Huaxia, GUAN Qingtian, et al. Research on digital photoelasticity of single-pixel imaging[J]. Journal of Experimental Mechanics, 2022, 37(1):9–17 (in Chinese))
- [8] Brewster D X. On the communication of the structure of doubly refracting crystals to glass, muriate of soda, fluor spar, and other substances, by mechanical compression and dilatation[J]. Philosophical transactions of the Royal Society of London, 1816, 106:156–178.
- [9] Dantu P. A contribution to the mechanical and geometrical study of non-cohesive masses [C]. London: Butterworths Scientific Publications, 1957:144–148.
- [10] Karen E D, Nicholas W H. Force chains in seismogenic faults visualized with photoelastic granular shear experiments[J]. Geophysical Research, 2008, 113:1–12.
- [11] 杨荣伟, 程晓辉. 光弹颗粒材料的直剪实验研究[J]. 岩土力学, 2009, 30(增刊1):104–109 (YANG Rongwei, CHENG Xiaohui. Direct shear experiments of photoelastic granular materials[J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, 30(S1):104–109 (in Chinese))
- [12] 郑虎. 基于光弹测试技术的颗粒材料细观变形试验研究[J]. 工程地质学报, 2014, 22(5):851–854 (ZHENG Hu. Experimental study on deformation of geo-granular materials based on photoelastic techniques[J]. Journal of Engineering Geology, 2014, 22(5):851–854 (in Chinese))
- [13] 李飞, 杨柳, 王金安, 等. 混合颗粒体光弹力链定量提取方法[J]. 工程科学学报, 2018, 40(3):302–312 (LI Fei, YANG Liu, WANG Jin'an, et al. A quantitative extraction method of force chains for composite particles in a photoelastic experiment[J]. Chinese Journal of Engineering, 2018, 40(3):302–312 (in Chinese))
- [14] Zheng H, Wang D, Behringer R P. Experimental study on granular biaxial test based on photoelastic technique[J]. Engineering Geology, 2019, 260:105208.
- [15] 陈福星, 杨朝宇, 邵荣生, 等. 光弹性颗粒的线扫描测力方法[J]. 物理实验, 2020, 40(4):47–53 (CHEN Fuxing, YANG Chaoyu, SHAO Rongsheng, et al. Linear scanning force measurement method based on photoelastic particles[J]. Physics Experimentation, 2020, 40(4):47–53 (in Chinese))
- [16] Acar G D, Ravula P, Balachandran B. Dynamic interactions of a driven pendulum with photoelastic granular media [J]. Physics Letters A, 2021, 396:127244.
- [17] 康毅力, 经浩然, 许成元, 等. 颗粒形状对裂缝封堵层细观结构稳定性的影响[J]. 西南石油大学学报(自然科学版), 2021, 43(3):81–90 (KANG Yili, JING Haoran, XU Chengyuan, et al. Effects of particle shape on the meso-structure stability of fracture plugging zones[J]. Journal of Southwest Petroleum University(Science & Technology Edition), 2021, 43(3):81–90 (in Chinese))
- [18] Zhao Y, Zheng H, Wang D, et al. Particle scale force sensor based on intensity gradient method in granular photoelastic experiments[J]. New Journal of Physics, 2019, 21(2):023009.
- [19] Howell D, Behringer R P, Veje C. Stress fluctuations in a 2D granular couette experiment: a continuous transition [J]. Physical Review Letters, 1999, 82(26):5241.
- [20] 宋彦琦, 高春艳, 牛建广. 应用 Matlab 图像处理技术提取云纹中心线[J]. 实验力学, 2006, 21(5):640–644

- (SONG Yanqi, GAO Chunyan, NIU Jianguang. Application of Matlab on the central lines' traction of moirés[J]. Journal of Experimental Mechanics, 2006, 21(5):640—644 (in Chinese))
- [21] 孙其诚, 金峰, 王光谦, 等. 二维颗粒体系单轴压缩形成的力链结构[J]. 物理学报, 2010, 59(1):30—37 (SUN Qicheng, JIN Feng, WANG Guangqian, et al. Force chains in a uniaxially compressed static granular matter in 2D [J]. Acta Physica Sinica, 2010, 59(1):30—37 (in Chinese))
- [22] 程向楠, 张兴义, 刘聪, 等. 颗粒材料接触特性之接触点确定[J]. 实验力学, 2017, 32(2):163—169 (CHENG Xiangnan, ZHANG Xingyi, LIU Cong, et al. On the determination of contact points of granular material properties[J]. Journal of Experimental Mechanics, 2017, 32(2):163—169 (in Chinese))

## Study on force chain of a two-dimensional photoelastic particle system based on $G^2$ value method

GUO Zhanwei<sup>1</sup>, CHEN Fanxiu<sup>1</sup>, WANG Yuan<sup>1</sup>, LIU Yuxin<sup>1</sup>, SUN Jie<sup>2</sup>, ZHONG Yichen<sup>1</sup>

(1. School of Science, Qingdao University of Technology, Qingdao 266033, Shandong, China;

2. School of Civil Engineering, Qingdao University of Technology, Qingdao 266033, Shandong, China)

**Abstract:** Force chain is an important concept in the study of particle systems, which is a concentrated embodiment of microscopic phenomena and plays a important role in the material system of macroscopic granular materials. The internal mechanical behavior of the particle system was studied by the photoelastic method, and the geometric information such as the center coordinates and contact point coordinates of the particle material was obtained by using digital image processing technology, the contact network of the entire particle system was obtained, and the changes of the geometric structure and the distribution of contact force and force chain network of two-particle systems of different diameters under vertical load were analyzed. The average color gradient algorithm was used to obtain the  $G^2$  value of the photoelastic fringe image and the relationship curve between the loading force and  $G^2$  value, the contact force between particles was calculated and got the distribution map of the force chain network. The results show that the  $G^2$  value of photoelastic particles increases with the increase of loading force, the  $G^2$  value of particles with few contact points is larger, the concentrated distribution interval of contact vector angle only fluctuates slightly in the interval distribution frequency, and the increase of vertical load does not affect the overall distribution. Analyzing the frequency distribution curve of contact force, it can be seen that the increase of vertical load can make the contact force on the smaller diametral 8mm particles in the particle system closer to the average contact force, the distribution is more uniform, and the larger diametral 9mm particles can support more loads and contact more other particles to bear greater contact forces. Studying the distribution of the force chain, it is found that the increase of vertical load within a certain range will make the distribution of the strong chain tend to be unified, and the particle arrangement on the strong chain is more compact, as the load continues to increase, the number of particles on the strong chain will become less and more likely to break and disintegrate into a single particle distribution, thereby aggravating the rearrangement nature of the particles.

**Keywords:** particle system; photoelastic experiment; contact vector angle; contact force; force chain