

文章编号:1001-4888(2021)00-0617-10

基于不同梁模型的弯曲变形分析与实验教学探讨*

王正直, 颜朔庚, 王琨, 高恩来, 税朗泉, 何勇, 黄凯

(武汉大学 土木建筑工程学院工程力学系, 湖北武汉 430072)

摘要: 梁的弯曲变形是基础力学的核心内容之一,以往实验教学中的变形分析通常基于 Euler-Bernoulli 梁模型进行,而对工程中常见的 Timoshenko 梁涉及较少,这种变形模式的单一性和局限性教学无疑落后于当前力学学科人才培养的发展趋势。为了使本科生深入理解梁弯曲行为并掌握更为全面的实验技术,本文通过理论分析和模型优化,研发并搭建了一套可同时验证两种梁模型(即 Euler-Bernoulli 梁和 Timoshenko 梁)的高精度实验平台。通过位移校准和精确变形测量,验证了两种梁模型的精度和适用条件。实验发现,加载处的跨高比小于 5 时,实测值与 Timoshenko 梁的理论解非常吻合;加载处的跨高比大于 5 时,两种梁模型的差异可以忽略, Euler-Bernoulli 梁模型可用于描述弯曲变形。基于该实验平台,编排设计了力学教学实验并进行了初步实践和评估,该课程阐明了剪切变形对梁弯曲变形的影响,使学生对梁模型的类型与相应假定的理解得到了加深;互动式教学和自主设计测量全方位提高了学生解决实际问题的能力。

关键词: 基础力学; 梁模型; 悬臂梁; 实验平台; 教学实验

中图分类号: G423.07; G642.0 **文献标识码:** A **DOI:** 10.7520/1001-4888-21-020

0 引言

新工科背景下,基础力学处于发展转型阶段,与多学科深度交叉渗透^[1-3]。为适应新形势,力学学科建设和人才培养必须持续深化改革,本科生力学实验教学质量的提升是改革的关键落脚点。传统力学实验教学在内容、实验装置和技术手段上已无法满足新型人才培养的需求,力学实验教学正在由基础性向设计性和研究性转变^[4],更注重基础理论的吸收运用,更强调分析和解决问题的能力,培养人才应以培养其解决实际问题的能力为导向^[5]。为此,实验教学的改革重点主要在两方面:一是加强理论与实验相结合,开设研究型和实践型互动式体验课堂,设计“基于基础,深化基础”的定制式实验,为学生继续深造打好基础;二是强化实验装置,强调力学测试方法和技术的推陈出新,探索学科前沿,贴近科研和工程实际,发展强有力的科教实验平台^[6-8]。

梁的弯曲理论作为材料力学核心内容之一,在不同尺度下的科学研究(如先进微纳结构的设计与制备)^[9]和工程实际(如桥梁和大型建筑物的设计与安全性分析)中都有着广泛的应用^[10]。目前,梁的教学实验主要基于考察纯弯梁弯曲内应力的分布和梁的挠度,其中弯曲内应力实验主要采用的是电测法,实验技术和实验教学都较为成熟,相关教学已开展多年,而对于梁挠度实验开展较少,类型较为单一,对

* 收稿日期: 2021-01-27; 修回日期: 2021-03-01

基金项目: 国家自然科学基金(11972264, 11602177); 湖北省自然科学基金(2016CFB2418)

第一作者: 王正直(1986-), 男, 副教授, 博士生导师。主要研究领域: 实验固体力学; 生物材料力学与仿生。Email: zhengzhi.wang@whu.edu.cn

通信作者: 黄凯(1987-), 男, 实验师。主要研究领域: 智能材料相变。Email: 00030505@whu.edu.cn

其原理探究较为缺乏^[11,12]。梁挠度实验教学主要基于平截面假定下的 Euler-Bernoulli 梁理论而设计,认为变形后截面仍保持与中轴线垂直,剪切刚度无限大,不产生剪应变。然而,在实际工程和研究中,由于梁的跨高比通常较低,其理论模型更偏向于 Timoshenko 梁,此时横截面与轴向不再垂直,出现剪应变项^[13-15]。当前,对 Timoshenko 梁的理论和实验教学涉及甚少,且基于现有实验装置模型的测量技术精度较低,误差较大,没有建立起一套完整的理论和实验体系来揭示和印证不同梁变形挠度机理。这种不全面的教学方式往往会导致学生的理解出现偏差并在工程实践中发生错误。因此,搭建一套完善的梁弯曲实验平台,让学生动手进行实验设计和测试,进而充分掌握两种梁理论,对比总结不同梁理论的适用条件,对提升学生的理解能力和培养其创新思维十分重要。

针对上述情况,本文设计了一套跨距可调的高精度悬臂梁挠度采集平台,包括悬臂支撑、可移动式悬挂、位移传感器和数据采集系统等,具有操作方便、测量精度高、可方便替代等优点,为基础力学实验教学提供了一种科研教学一体化的平台。基于该平台,通过对不同类型悬臂梁进行了测试与校核,既加深了学生对于不同类型梁变形理论的理解,又为实验教学提供了实用型的案例。

1 不同类型梁的弯曲变形理论

梁是以弯曲为主要变形的杆件,以等截面矩形悬臂直梁为例,模型示意如图 1(a)所示。度量梁变形后横截面位移主要有两个基本量:横截面形心沿 z 轴方向的线位移 w ;横截面相对于其原来位置的总角位移 θ 。梁在实际受到垂向荷载时,由于外力作用于梁的位置不同,所产生的剪应力对截面转角的贡献不同,因而梁挠度也不同,可分为如下两种梁模型来讨论。

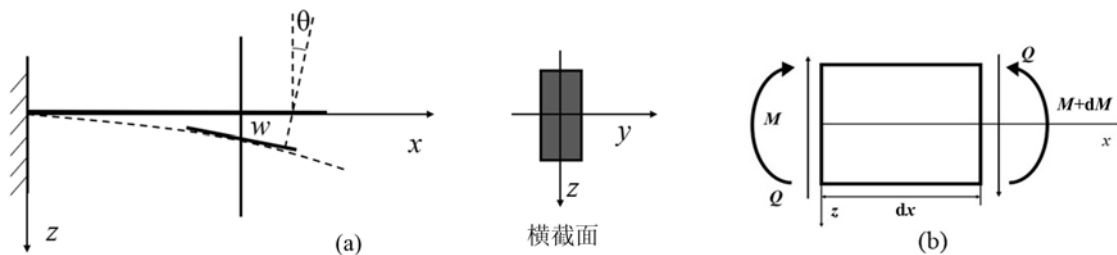


图 1 (a)悬臂梁示意模型;(b)微元体受力示意图

Fig. 1 (a) schematic model of a cantilever beam; (b) schematic diagram of the force on a representative element volume of the beam

1.1 基于 Euler-Bernoulli 梁的理论分析

对如图 1(b)所示微元体,列平衡方程可得

$$dM - Qdx = 0 \quad (1)$$

式中:弯矩 M 和剪力 Q 可以由正应力 σ_{xx} 以及切应力 τ_{xz} 在梁截面 A 的积分表示为

$$M = \int_A z\sigma_{xx} dA \quad (2)$$

$$Q = \int_A \tau_{xz} dA$$

假设梁各点位移如式(3)所示:

$$u_x = -z\beta(x) \quad (3)$$

$$u_z = w(x)$$

式中 $\beta(x)$ 为梁纯弯曲产生的转角,在 Euler-Bernoulli 梁理论下,不考虑剪切项,故 $\theta = \beta(x)$ 。

梁满足平截面假设与小变形假设且 w 只是 x 的函数,与 y, z 无关,因此应变可以表示为

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = -z \frac{d\beta}{dx} \\ \gamma_{xz} &= 2\epsilon_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{dw}{dx} - \beta \end{aligned} \quad (4)$$

根据广义胡克定律,得到正应力 σ_{xx} 、切应力 τ_{xz} 为

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -Ez \frac{d\beta}{dx} \\ \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} = 2G\epsilon_{xz} = G\left(\frac{dw}{dx} - \beta\right)\end{aligned}\tag{5}$$

式中: E 是材料的弹性模量; G 是剪切模量。

Euler-Bernoulli 梁满足平截面假设,忽略了剪切变形对挠度产生的影响,于是有

$$\beta = \frac{dw}{dx}, G \rightarrow \infty\tag{6}$$

将式(5)中的 σ_{xx} 代入式(2),得到挠度与弯矩、剪力的关系式:

$$\begin{aligned}M &= -EI \frac{d^2 w}{dx^2} \\ Q &= -\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right)\end{aligned}\tag{7}$$

式中: $I = \int_A z^2 dA = \frac{bh^3}{12}$ 为横截面对中性轴的惯性矩; b 为梁的宽度; h 为梁的高度。Euler-Bernoulli 梁理论适用于细长梁 ($h/l \rightarrow 0$, l 为梁长度), 对于跨高比较大的梁来说, 忽略剪力对梁变形的作用不会对结果产生较大影响。

1.2 基于 Timoshenko 梁的理论分析

对于大多数实际梁,其跨高比较小,剪切变形对于梁的截面转角和挠度有相对较大贡献,因而无法被忽略。在式(5)中, G 值由截面形状和泊松比共同决定,故以 kG 代替 G , k 为剪切系数,它表示梁的横截面上的平均剪应变与形心处剪应变之比^[16],其值与截面形状相关。将式(5)代入式(2),得到挠弯矩和剪力的表达式:

$$\begin{aligned}M &= -EI \frac{d\beta}{dx} \\ Q &= kGA \left(\frac{dw}{dx} - \beta \right)\end{aligned}\tag{8}$$

1.3 两种梁挠度理论解

悬臂梁结构示意图如图 2 所示,通过悬挂砝码为悬臂梁施加一个竖直向下的集中力 F ,砝码距离悬臂梁固定端的水平距离为 a ,利用位移传感器得到梁末端位移变化 w 。

在 $O-a$ 段有:

$$M = Fa \quad Q = F$$

将边界条件 $x=0: w=0, \beta=0, M=Fa, Q=F$ 分别代入式(7)、式(8),便得到 $O-a$ 段两种类型梁的挠曲线方程:

$$w_1 = \frac{Fa}{2EI}x^2 - \frac{F}{6EI}x^3\tag{9a}$$

$$w_2 = \frac{Fa}{2EI}x^2 - \frac{F}{6EI}x^3 + \frac{F}{kGA}x\tag{9b}$$

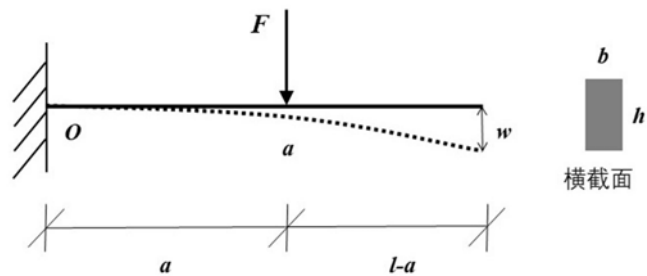


图 2 悬臂梁结构示意图

Fig. 2 Schematic diagram of the cantilever beam structure

在 $a-l$ 段,由式(9a)、式(9b)可得

$$w_1(a) = \frac{Fa^3}{3EI}\tag{10a}$$

$$w_2(a) = \frac{Fa^3}{3EI} + \frac{F}{kGA}a\tag{10b}$$

$$\left. \frac{dw_1}{dx} \right|_{x=a} = \frac{Fa^2}{2EI}\tag{11a}$$

$$\left. \frac{dw_1}{dx} \right|_{x=a} = \frac{Fa^2}{2EI} + \frac{F}{kGA} \quad (11b)$$

$$w(l) = w(a) + (l-a) \times \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=a} \quad (12)$$

将式(10a)、式(10b)、式(11a)、式(11b)代入式(12)便可得到悬臂梁末端挠度表达式:

$$w = \frac{Fl}{2EI}a^2 - \frac{F}{6EI}a^3 \quad (13a)$$

$$w = \frac{Fl}{2EI}a^2 - \frac{F}{6EI}a^3 + \frac{F}{kGA}l \quad (13b)$$

式(13a)为 Euler-Bernoulli 梁挠度理论表达式,式(13b)为 Timoshenko 梁挠度理论表达式。

2 悬臂梁实验平台与实验测试

2.1 悬臂梁实验平台

为了使学生更深入地理解两种梁理论,本文利用新型测量采集技术,搭建了一套通过调节跨距实现不同类型梁相互切换的悬臂梁实验平台,如图3所示。实验平台的主体部分由带精确刻度的等截面悬臂梁、电容式位移传感器以及支撑装置组成。其中梁由45#钢制成,严格控制其加工精度使得各截面误差不超过0.5%,其平均高度 $h=12.68\text{mm}$,宽度 $b=6.37\text{mm}$,弹性模量 $E=203\text{GPa}$,泊松比 $\nu=0.305$;位移的测量采用cpl-190型非接触电容式传感器,精度为 $0.01\mu\text{m}^{[17]}$;悬挂的砝码使悬臂梁产生弯曲变形,进而使扁平金属靶向下移动,传感器探头以10Hz的频率采集扁平金属靶与探头之间的电容,再将采集到的数据传递至数据采集系统中,通过数据采集系统中电容与扁平金属靶位移的关系,得到扁平金属靶移动的距离,从而实现对梁的末端挠度的高频实时采集。此实验平台同时也可用作科研平台,适用于各种材料变形的高精度位移采集和受力的测量,可为材料的力学性能测试(如收缩应力、热应力等)提供有力的支撑。平台的适配性好,如图3中的钢制悬臂梁可替换为各种尺寸的材料,探头处也可更换成采集不同信号的传感器,如荷载、速度、加速度等。在功能上可实现各种介质多场同步耦合测试,例如采集测试点位移数据的同时,利用同步数字相关技术获得全场应变,利用红外热像技术获得全场温度演化等,进而实现多场耦合同步原位测量,为材料力学性能的测试研究提供宽路径、多功能的实验平台。

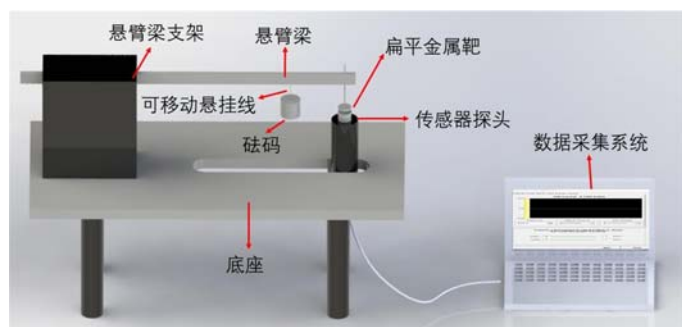


图3 悬臂梁测试及采集平台示意图

Fig. 3 Schematic diagram of the cantilever-beam-based testing system

2.2 梁挠度实验测试

首先通过支架固定悬臂梁一端(长度可调节),按照刻线调节测试段的砝码挂线,改变砝码在梁上的悬挂位置,即梁的跨距(有效长度 a),从而改变梁有效部分的跨高比,实现短粗悬臂梁与细长悬臂梁之间的转换。选定刻线后,调零传感器位移,悬挂砝码,待砝码稳定后,通过固定于梁末端下方的位移传感器采集梁末端挠度。实验选取的加力点跨高比范围为2~17cm,分别选取了1995.0g、550.6g与200.4g三种质量的砝码进行集中力的加

载(下文中分别使用大、中、小代替)。为了验证梁的理论公式精度,将梁的跨距、荷载以及材料参数代入式(13),获得相应条件下的理论值,进而与传感器采集的实验值进行对比。

在实验平台的设计方面,影响悬臂梁末端挠度测试结果的主要因素包括:实验平台的稳定性、悬臂梁的水平度和梁本身的均匀性。如图3所示的实验平台,在设计方面主要存在悬臂梁底座水平度和支撑端稳固性的问题,因此实验平台设计可做如下进一步优化:(1)底座加装可调高度旋钮,在实验准备阶段,通过水平仪校准梁底座的水平度。(2)支承端两侧安装固定螺位,使其更为稳固,减少固定端的微小

位移。(3)利用热处理使得原材料在微结构方面更为均匀,并利用高分辨率显微镜校准材料横截面,保证其截面均匀性。

3 实验结果分析与讨论

3.1 理论与实验结果对比

通过对钢梁的测试,得到悬臂梁在小、中、大砝码作用下的实验采集数据,分别记为 Exp-S、Exp-M 和 Exp-L。将梁的参数带入两种梁的理论,得到悬臂梁在小、中、大砝码作用下的 Euler-Bernoulli 梁理论解,分别记为 Euler-S、Euler-M 和 Euler-L,以及 Timoshenko 梁理论解,分别记为 Timo-S、Timo-M 和 Timo-L。由于大砝码作用下梁的挠度明显高于小、中砝码的挠度值,为了方便比较,分为两种情况进行对比:小、中砝码和大砝码。此外,由于跨距影响,悬臂梁末端挠度随跨高比(a/h)的变化曲线分为两段讨论:跨高比 2~5 段和 5~17 段。在不同砝码加载下,两种类型梁的理论解与实验值的对比如图 4 和图 5 所示。由图可知:(1)在所有荷载作用下,当梁的跨高比大于 5 时,两种梁的理论解差别非常小,曲线接近于重合。(2)当跨高比小于 5 时,两种梁的理论解显现差别, Timoshenko 梁的理论挠度要大于 Euler-Bernoulli 梁,在大、中砝码作用情况下更加明显。(3)无论处于何种跨距,两种梁的整体理论值都比实测值小,因而需要根据实际情况,对理论解进行修正。

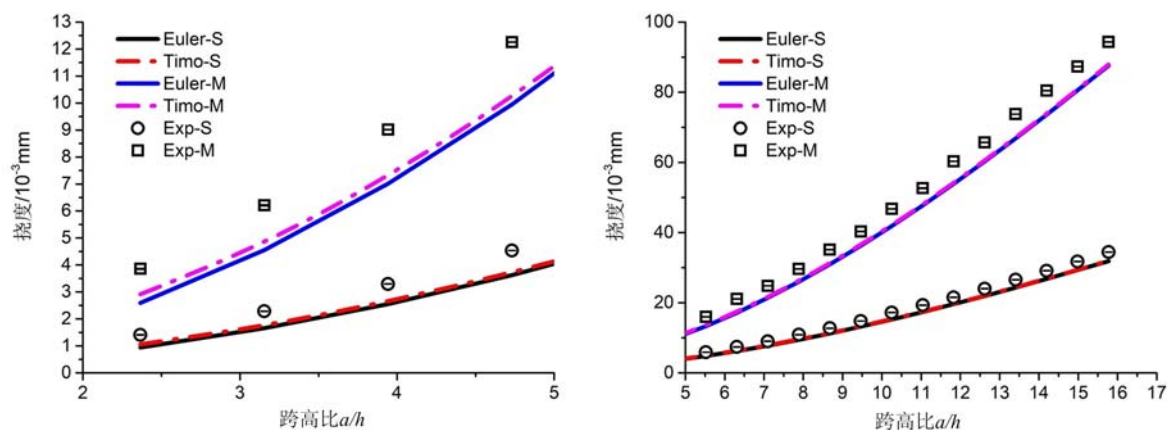


图4 使用小、中砝码时梁末端挠度随跨高比变化图(理论值修正前):(左)跨高比小于5;(右)跨高比大于5。其中 Euler-S 和 Euler-M 分别为小、中砝码作用下的 Euler-Bernoulli 梁理论解;Timo-S 和 Timo-M 分别为小、中砝码作用下 Timoshenko 梁理论解;Exp-S 和 Exp-M 分别为小、中砝码作用下的实验数据

Fig. 4 Comparison of the beam deflections between experiments and theories (before correction) under small and medium weights: (Left) span-height ratio is smaller than 5; (Right) span-height ratio is higher than 5. Euler-S and Euler-M are the theoretical solutions of the Euler-Bernoulli beam under small and medium weights, respectively; Timo-S and Timo-M are the theoretical solutions of the Timoshenko beam under small and medium weights, respectively; Exp-S and Exp-M are the experimental data with small and medium weights, respectively

3.2 校准修正、数据分析与讨论

根据相关文献所述^[18],无论悬臂梁是否与支承整体加工,在弯矩和剪力作用下,支承端发生弹性变形,悬臂梁均会在内置端旋转产生一个微小的转角(如图6所示)。除了梁有效长度部分本身的弯曲和剪切造成的位移外,这个转角也会贡献相应的位移,使得梁末端挠度增加。目前在实验上可采用两种手段来校准支承端转角造成的位移^[19],一种是利用微观数字相关方法(DIC)获得全场位移;另一种是采用电测法中贴应变片的方式,获得其纵向、横向以及 45° 方向的应变。

O'DONNELL 假设悬臂内置端的力矩 M 通过法向应力的三次分布传递给支承,通过叠加作用在支架单元上的集中荷载引起的位移,进而实现三次应力分布的平均旋转^[18]。将三次应力分布所推导出的挠度结果与实验结合,便得到支撑弹性所产生的额外挠度:

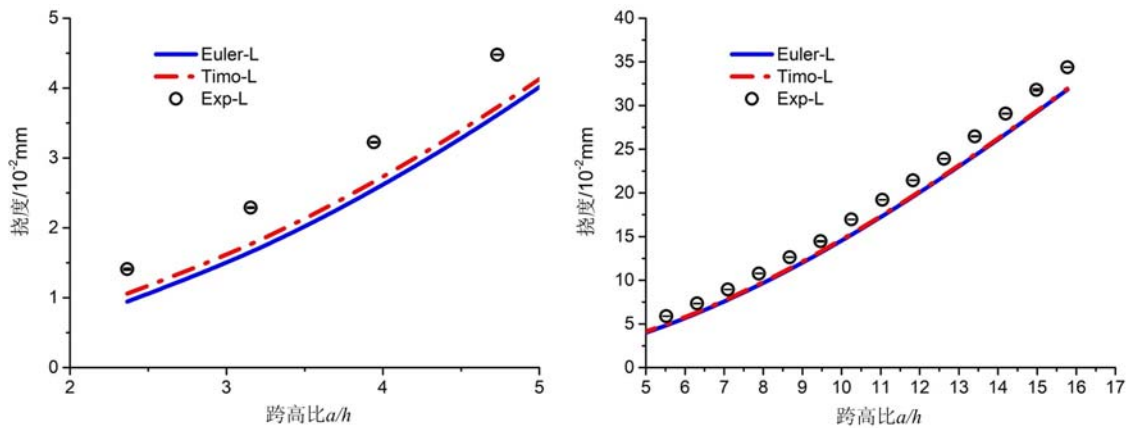


图5 使用大砝码时梁末端挠度随跨高比变化图(理论值修正前):(左)跨高比小于5;(右)跨高比大于5。Euler-L代表大砝码作用下的 Euler-Bernoulli 梁理论解,Timo-L代表大砝码作用下的 Timoshenko 梁理论解,Exp-L代表大砝码作用下的实验数据

Fig.5 Comparison of the beam deflections between experiments and theories (before correction) under large weight: (Left) span-height ratio is smaller than 5; (Right) span-height ratio is higher than 5. Euler-L is the theoretical solution of the Euler-Bernoulli beam under large weight, Timo-L is the theoretical solution of the Timoshenko beam under large weights, and Exp-L is the experimental data

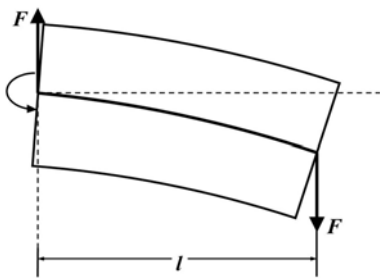


图6 支撑端部弹性变形示意图

Fig.6 Schematic diagram of the elastic deformation of the beam support

$$\delta_x = \frac{16.68Ml}{\pi Eh^2} + \frac{(1-\nu)Fl}{Eh} \quad (14)$$

使用式(14)得到的额外挠度对理论式(13)进行修正,便可得到修正后的悬臂梁末端挠度:

$$\omega = \frac{Fl}{2EI}a^2 - \frac{F}{6EI}a^3 + \frac{16.68Ml}{\pi Eh^2} + \frac{(1-\nu)Fl}{Eh} \quad (15a)$$

$$\omega = \frac{Fl}{2EI}a^2 - \frac{F}{6EI}a^3 + \frac{F}{k^2 GA}l + \frac{16.68Ml}{\pi Ebh^2} + \frac{(1-\nu)Fl}{Ebh} \quad (15b)$$

式(15a)为修正后的 Euler-Bernoulli 梁末端挠度表达式,式(15b)为修正后的 Timoshenko 梁末端挠度表达式。将梁的参数代入修正后的理论中,分别得到了修正后梁末端挠度随跨高比的变化,如图7和图8所示。

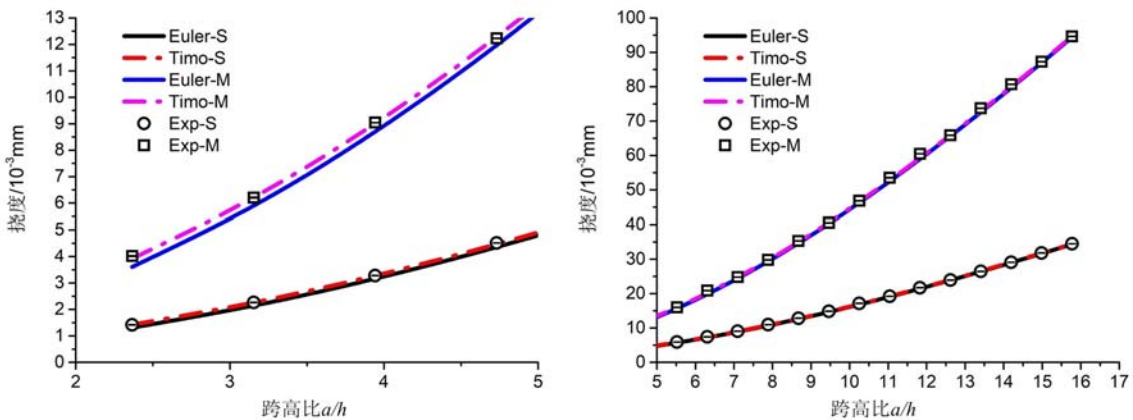


图7 使用小、中砝码时梁末端挠度随跨高比变化图(修正后):(左)跨高比小于5;(右)跨高比大于5

Fig.7 Comparison of the beam deflections between experiments and theories (after correction) under small and medium weights: (Left) span-height ratio is smaller than 5; (Right) span-height ratio is higher than 5

根据图7与图8所展示的实验与修正后理论结果的对比可知,实验整体的结果都更贴近于 Timo-

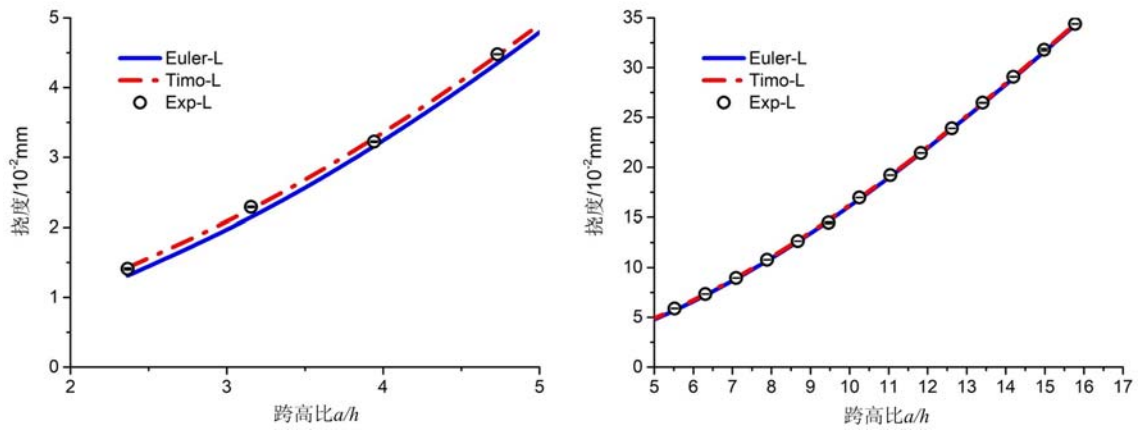


图 8 使用大砝码时梁末端挠度随跨高比变化图(修正后):(左)跨高比小于 5;(右)跨高比大于 5

Fig. 8 Comparison of the beam deflections between experiments and theories (after correction) under large weight: (Left) span-height ratio is smaller than 5; (Right) span-height ratio is higher than 5

shenko 梁理论,当跨高比小于等于 5 时,两种梁理论的差别相对明显;当跨高比大于 5 时,随着跨高比的增加,两种梁理论的差值逐渐减少,在图 7 与图 8 中表现为曲线越来越接近。

表 1 给出了不同集中力作用下实验值与理论值的相对误差,由表中数据可以看出,Timoshenko 梁理论值与实验值的相对误差要小于 Euler-Bernoulli 梁。通过将 Timoshenko 梁与 Euler-Bernoulli 梁两种理论的结果与实验结果进行对比,可总结出两种梁理论的适用条件:(1)当梁跨高比小于 5 时,可选用 Timoshenko 梁理论。(2)当梁跨高比大于 5 时,两种梁理论值相对于实测值的误差逐渐减少,则可选用更为简单的 Euler-Bernoulli 梁理论。

表 1 两种梁理论实验与理论数据的相对误差

Tab. 1 Relative errors between experimental data and theoretical results of the two beam theories

测点跨距 /cm	跨高比	末端挠度实验值与理论值的相对误差/%					
		Euler-Bernoulli 梁			Timoshenko 梁		
		200.4g	550.6g	1995.0g	200.4g	550.6g	1995.0g
3	2.366	7.52	10.22	7.18	0.56	2.37	0.93
4	3.155	5.19	4.90	6.59	0.12	0.19	1.60
5	3.943	3.55	3.80	2.28	0.05	0.31	1.26
6	4.732	3.45	2.08	3.11	0.91	0.50	0.55
7	5.521	3.66	1.95	3.42	1.72	0.02	1.48
8	6.309	2.32	4.92	1.97	0.77	3.40	0.41
9	7.098	1.91	1.48	1.15	0.64	0.21	0.12
10	7.886	2.37	1.46	1.26	1.32	0.40	0.20
11	8.675	1.74	1.87	0.63	0.85	0.98	0.28
12	9.464	1.34	0.56	0.96	0.57	0.22	1.75
13	10.252	1.91	1.26	0.66	1.24	0.59	0.02
14	11.041	5.87	2.00	1.04	0.01	1.41	0.45
15	11.830	1.17	2.58	0.39	0.65	2.06	0.15
16	12.618	0.07	2.97	0.50	0.41	0.18	0.02
17	13.407	0.09	1.56	0.67	0.34	1.13	0.24
18	14.196	0.35	1.27	0.36	0.05	0.88	0.03
19	14.984	0.53	3.91	0.56	0.17	0.03	0.20
20	15.773	0.47	0.28	0.28	0.14	0.05	0.05

由于实验平台中悬臂梁与底座之间的空间有限,本文中实验采用的最大砝码为 1995.0g,对于横截面为 80.77mm^2 的钢制悬臂梁来讲,所施加的集中荷载较小,产生的变形为弹性变形的初段,所以两种梁产生的挠度都较小。同时,由于剪力较小,其产生的微变形贡献也比较有限,因此两种梁的挠度结果在图形上的差别较小。为此,可基于加载条件和平台设计进行改进,以增大挠度差别。具体改进方案包括:增加悬臂梁纵向空间,增大集中荷载,使得剪应力的贡献更大。这些方案会在后续研究中进行实施和优化,使得弯曲变形实验更适用于本科教学。

4 梁弯曲的实验教学探讨

结合本文中的实验平台和初步测试结果,对梁弯曲实验教学进行了课程规划设计,包括课程内容、分项流程、仪器设备布置、实验报告等。设计重点是让学生关注不同梁的类型和变形的机理,了解测试技术和实验原理,深化理论与实践结合的认知。实验课程内容主要由梁的类型介绍及理论分析、不同梁的模型演示、实验装置和仪器设备简介、悬臂梁加载操作、数据采集和处理分析验证等组成。形式上采用理论推导、模型演示、操作指导和自主实践等。增加了高分辨视频测量和多媒体投影演示,实现了互动式引导教学。基于此课程设计,对工程力学专业学生进行了课堂教学实践和现场评估,课时 2 小时,学生分为 12 组按课程指导进行实验,每组 2 人,实验内容中如力臂长度、砝码搭配和信号采集都可自主设计。评估人员包括力学系教师和实验人员,对课程现场环节打分并给出意见,主要考察课程内容的科学性和对学生的启发性、检验实验平台的创新性和实操性,了解学生对实验课程的吸收掌握情况。

课程效果和评估结果表明:(1)该课程实验内容和技术基于工程实际梁的理论,阐明了剪应力在梁的变形中的作用,使学生对梁的类型、实验假定和微小作用因素的理解得到了加深。(2)实验平台采用了高精度电测采集技术,适合演示指导和分组操作,学生参与性强,并可自主设计验证,培养了实际动手能力。(3)不同梁的挠度实验是弯曲变形的重要环节,是对于传统材料力学教学实验的补充,课程提高了学生的学科专业水准和素养。总体上该课程充分发挥了实验平台的功能,达到了基于理论,验证理论,深化基础的教学目的。与此同时,教学效果仍存在着如学生对采集原理的了解不深、对梁的使用工况不太清楚等问题。为此,后续不同梁的弯曲教学实验主要基于如下几点进行改进:(1)为了使学生了解高精度测量原理,需增加位移传感器的工作原理部分和应用实例,更好地促进学生理解。(2)增加更贴合实际的工程案例演示,特别是模型的案例,展示不同类型梁的使用工况。(3)优化课堂内容的编排,运用动画和视频记录等媒介,达到多媒体模型演示与实验相结合的教学目的。基于此改进后的实验课程预计将会在力学及相关专业开展,还将结合全场应变的测量环节,更好地显示剪应力在梁变形中的作用,融合不同学科特点,达到培养复合型人才的目;实验平台对于交叉学科科研实验和教学实验也将起到更好的支撑作用,结合实验教学的持续优化,可为培养新工科实验教学提供参考。

5 结论

基于对两种类型梁(Euler-Bernoulli 梁和 Timoshenko 梁)的弯曲变形理论分析研究,本文依托自主研发的悬臂梁实验平台,利用高精度测量技术,验证了两种梁的理论精度和适用条件,并将梁弯曲内容编排设计后在力学实验教学中进行了初步实践。该实验平台可调节跨距,实现不同类型梁的自由切换,通过测试校准后发现,当加力点跨高比小于 5 时,实测值更加贴近于 Timoshenko 梁理论的结果,实测值与理论结果完全吻合。将这一平台引入到力学实验教学中,大大加深了本科生对梁弯曲理论的认识和理解,也提高了学生在实验设计与分析上的创新能力。本文建立的梁弯曲理论验证方法也将进一步提高平台的测试精度,从而得以在不同的测试范围内选择合适的理论对测试结果进行修正。此外,该实验平台也可与其他多种测试技术(如 DIC、温度测试、红外光谱等)配合,实现对不同材料的多场耦合同步测量,进而将力学测量与变形、温度、化学等测试集成于一体,为材料的耦合性能研究提供普适的测试方法。

参考文献:

[1] 徐锋,范剑,许晨光. 新工科背景下地方高校材料力学金课建设路径与探索[J]. 力学与实践, 2020, 42(2):226

- 231 (XU Feng, FAN Jian, XU Chenguang. Path and exploration of material mechanics course construction in local universities under the background of new engineering[J]. *Mechanics in Engineering*, 2020, 42(2): 226—231 (in Chinese))
- [2] 张小钢, 姜华. 大连理工大学力学学科发展规律探析[J]. *高教发展与评估*, 2020, 36(2): 51—58, 112 (ZHANG Xiaogang, JIANG Hua. Analysis on the development law of mechanics discipline in Dalian University of Technology[J]. *Higher Education Development and Evaluation*, 2020, 36(2): 51—58, 112 (in Chinese))
- [3] 周磊, 王世斌, 李林安, 等. 皮肤力学的研究进展[J]. *实验力学*, 2020, 35(6): 955—969 (ZHOU Lei, WANG Shibin, LI Lin'an, et al. Research progress of skin mechanics[J]. *Journal of Experimental Mechanics*, 2020, 35(6): 955—969 (in Chinese))
- [4] 周益春, 唐明华, 杨丽, 等. 基于钱学森工程科学理念的研究生培养模式探索[J]. *中国高校科技*, 2020(4): 59—62 (ZHOU Yichun, TANG Minghua, YANG Li, et al. Exploration of postgraduate training mode based on Qian Xuesen's engineering science concept [J]. *Chinese University Technology Transfer*, 2020(4): 59—62 (in Chinese))
- [5] 杨晓峰, 刘全. 工程问题导向型材料力学教学法改革与实践[J]. *力学与实践*, 2018, 40(4): 442—445 (YANG Xiaofeng, LIU Quan. Reform and practice of engineering problem oriented material mechanics teaching method [J]. *Mechanics in Engineering*, 2018, 40(4): 442—445 (in Chinese))
- [6] 张志镇, 杨玉贵, 高亚楠, 等. 源自工程实践的材料力学创新实验教学探索[J]. *实验技术与管理*, 2016, 33(10): 188—192 (ZHANG Zhizhen, YANG Yugui, GAO Yanan, et al. Exploration of innovative experimental teaching of mechanics of materials from engineering practice [J]. *Experimental Technology and Management*, 2016, 33(10): 188—192 (in Chinese))
- [7] 叶贵根, 薛世峰, 戴兰宏. 高速切削实验平台在力学实验教学中的应用[J]. *实验力学*, 2016, 31(5): 715—722 (YE Guigen, XUE Shifeng, DAI Lanhong. On the application of high speed cutting experimental platform in mechanics experiment teaching [J]. *Journal of Experimental Mechanics*, 2016, 31(5): 715—722 (in Chinese))
- [8] 沙毅, 李其朋, 李勇. 流体力学计算机仿真实验教学的开发与设计[J]. *实验力学*, 2018, 33(4): 655—664 (SHA Yi, LI Qipeng, LI Yong. On the development and design in computer simulation experiment teaching of fluid mechanics [J]. *Journal of Experimental Mechanics*, 2018, 33(4): 655—664 (in Chinese))
- [9] Wang Z, Wang K, Liang D, et al. Hybrid magnetic micropillars arrays for programmable actuation [J]. *Advanced Materials*, 2020, 32: 2001879.
- [10] 胡卫强, 王敏庆, 刘志宏. 悬臂梁弯曲共振法自由阻尼结构试件设计研究[J]. *实验力学*, 2008, 23(3): 241—247 (HU Weiqiang, WANG Minqing, LIU Zhihong. Research on the design of free damping structure specimen with cantilever beam bending resonance method [J]. *Journal of Experimental Mechanics*, 2008, 23(3): 241—247 (in Chinese))
- [11] 吴晓, 刘奇元, 罗佑新. 用材料力学方法研究不同模量梁的弯曲变形[J]. *中南大学学报(自然科学版)*, 2018, 49(12): 2972—2978 (WU Xiao, LIU Qiyuan, LUO Youxin. Study on bending deformation of beams with different modulus by mechanics of materials [J]. *Journal of Central South University (Natural Science Edition)*, 2018, 49(12): 2972—2978 (in Chinese))
- [12] 何斌, 范钦珊, 张慧玲. 均布力偶作用下细长梁力学分析[J]. *固体力学学报*, 2011, 32(5): 534—540 (HE bin, FAN Qinshan, ZHANG Huiling. Mechanical analysis of slender beam under uniformly distributed couple [J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2011, 32(5): 534—540 (in Chinese))
- [13] Gatti P L, Ferrari V. *Applied structural and mechanical vibrations* [J]. Crc Press, 2013, 23(1): 146.
- [14] Timoshenko S P, Gere J M. *Mechanics of materials* [M]. New York: Van Nostrand Reinhold, 1973: 156—158.
- [15] Pai P F, Schulz M J. Shear correction factors and an energy-consistent beam theory [J]. *International Journal of Solids & Structures*, 1999, 36(10): 1523—1540.
- [16] Cowper G R. The shear coefficient in timoshenko's beam theory [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1966, 33(2): 335—340.
- [17] Wang Z, Landis F A, Giuseppetti A A M, et al. Simultaneous measurement of polymerization stress and curing kinetics for photo-polymerized composites with high filler contents [J]. *Dental Materials*, 2014, 30(12): 1316—1324.

- [18] O'Donnell W J. The additional deflection of a cantilever due to the elasticity of the support[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1960, 27(3): 461.
- [19] 邵新星, 黄金珂, 何小元, 等. 基于视觉的桥梁挠度测量方法与研究进展[J]. *实验力学*, 2021, 36(1):29-42 (SHAO Xinxing, HUANG Jinke, HE Xiaoyuan, et al. Measurement method and recent progress of vision-based deflection measurement of bridges [J]. *Journal of Experimental Mechanics*, 2021, 36(1):29-42 (in Chinese))

Bending deformation analysis and experimental teaching discussion based on different beam models

WANG Zhengzhi, YAN Shuogeng, WANG Kun,

GAO Enlai, SHUI Langquan, HE Yong, HUANG Kai

(Department of Engineering Mechanics, School of Civil Engineering, Wuhan University, Wuhan 430072, Hubei, China)

Abstract: The bending deformation of beam is one of the core contents of basic mechanics. The deformation analysis in previous experimental teaching is usually based on Euler-Bernoulli beam model, while the Timoshenko beam that commonly adopted in engineering is rarely involved. The monotony and limitation of the bending deformation teaching undoubtedly lag behind the current development trend of mechanical science training. In order to make undergraduates deeply understand the beam bending theory and master more comprehensive experimental techniques, a set of high-precision cantilever-beam-based experimental system was built based on theoretical analysis and optimization design, which can verify the deformation theories of two types of beams (i. e. Euler-Bernoulli beam and Timoshenko beam). Through displacement calibration and accurate measurement of the bending deformation, the accuracy and applicable conditions of the two beam theories were validated. It was found that when the span to height ratio at the point of concentrated force was smaller than 5, the measured values were in good agreement with the theoretical ones for the Timoshenko beam. While when the span to height ratio was higher than 5, the difference between the two theories gradually decreased and the Euler-Bernoulli beam theory could be adopted. Based on the experimental system, the mechanics teaching experiment was designed and preliminary practices and evaluations were carried out. The results show that the course clarifies the influence of shear deformation on beam bending deformation, and deepens students' understanding of beam model types and corresponding assumptions. The interactive teaching and self-designed measurement greatly improved the students' abilities to solve the practical engineering problems.

Keywords: basic mechanics; beam model; cantilever beam; experimental platform; teaching experiment